

Christian Harth

**Herleitung von Rechnungsgrundlagen über
Credibility Theorie**

BACHELORARBEIT

HOCHSCHULE MITTWEIDA

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fakultät

Mathematik/Naturwissenschaften/Informatik

Mittweida, 2010

Christian Harth

Herleitung von Rechnungsgrundlagen über Credibility Theorie

Bachelorarbeit

Hochschule Mittweida

Fakultät Mathematik/Naturwissenschaften/Informatik

Münchener Rückversicherungsgesellschaft AG



München, 2010

Betreuer:

Dipl.-Math. Bernd Fischer, Hochschule Mittweida

Dr. Frank Schiller, Münchener Rückversicherungsgesellschaft AG

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Ziel der Bachelorarbeit	6
2	Herleitung von Eintrittswahrscheinlichkeiten	10
2.1	Problemstellung	10
2.2	Schätzung der rohen Eintrittswahrscheinlichkeiten	11
2.2.1	Schätzung über Klassische Methode	11
2.2.2	Schätzung über Initial Exposure to Risk	14
2.2.3	Schätzung über Central Exposure to Risk	14
3	Die Burning Cost Methode	17
4	Der Limited Fluctuation Approach	20
4.1	Modell - Limited Fluctuation Credibility	21
4.1.1	Full - Credibility	21
4.1.2	Partial - Credibility	25
4.2	Der Limited Fluctuation Approach und Inzidenzraten	26
4.2.1	Die Anwendung auf Inzidenzraten	27
4.2.2	Beispiel	29
4.2.3	Limited Fluctuation Credibility und Altersbänder	31
4.3	Beurteilung des Limited Fluctuation Approach	38
5	Marktsimulation	40
5.1	Einleitung	40
5.2	Das Vorgehen	41
5.3	Vergleiche im „Szenario mit niedrigerer Schadenbeobachtung als erwartet“	45
5.3.1	Vergleich Burning Cost und einfache Limited Fluctuation Credibility	45
5.3.2	Vergleich Burning Cost und Limited Fluctuation mit gemeinsamen Credibility-Faktor	47

5.3.3	Vergleich einfache Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel	50
5.3.4	Zusammenfassung der Beobachtungen für das „Szenario mit niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“	51
5.4	Vergleiche im „Szenario mit erwarteter Schadenbeobachtung“	53
5.4.1	Vergleich Burning Cost und einfache Limited Fluctuation Credibility	53
5.4.2	Vergleich einfache Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel	55
5.4.3	Vergleich apodiktische Tafel und Burning Cost	57
5.4.4	Zusammenfassung der Beobachtungen für das „Szenario mit erwarteter Schadenerfahrung“	58
5.5	Vergleiche im „Szenario mit höherer Schadenbeobachtung als erwartet“ . .	59
5.5.1	Vergleich Burning Cost und einfache Limited Fluctuation Credibility	59
5.5.2	Vergleich einfache Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel	61
5.5.3	Vergleich apodiktische Tafel und Burning Cost	63
5.5.4	Zusammenfassung der Beobachtungen für das „Szenario mit höherer Schadenerfahrung als erwartet“	64
5.6	Zusammenfassung der Marktsimulation	65
6	Zusammenfassung und Ausblick	68
6.1	Zusammenfassung	68
6.2	Ausblick	70
	ANHANG	72
	Hauptprogramm zum Limited Fluctuation Ansatz	72
	Unterprogramme zum Limited Fluctuation Ansatz	75

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben, recht herzlich bedanken. Mein besonderer Dank für die intensive Betreuung und die zahlreichen Anregungen geht dabei an Herrn Dr. Schiller, Frau Dr. Gschlößl, Frau Jaschke und Herrn Jensen von der Münchener Rückversicherungsgesellschaft, sowie Herrn Fischer von der Hochschule Mittweida.

1 Einleitung und Ziel der Bachelorarbeit

Rechnungsgrundlagen sind seit Beginn des Versicherungswesens ein wesentlicher Bestandteil dieser Branche. Sie dienen aus versicherungsmathematischer Sicht Parameter insbesondere in Beitrags- bzw. Deckungskapitalformeln. In den letzten Jahren wurden besondere Verfahren für die Herleitung von Rechnungsgrundlagen entwickelt, speziell in der Lebensversicherung. Dafür müssen große Mengen von Beobachtungen bzw. Versichertenbestände vorliegen. Das heißt, man betrachtet eine Menge von Versicherten und beobachtet deren Schadenanzahl. In dem Abschnitt 2 wird beschrieben, wie aus solchen Beobachtungen rohe Eintrittswahrscheinlichkeit hergeleitet werden. Dafür stellt man verschiedene Verfahren vor, wie Herleitung über Initial Exposure und Central Exposure. Gegen Ende dieses Abschnittes wird zu erkennen sein, dass die Herleitung über Central Exposure für die meisten Datenbestände eine der besten Vorgehensweisen ist.

Es gibt aber auch andere Verfahren, um solche Rechnungsgrundlagen bzw. Eintrittswahrscheinlichkeiten herzuleiten oder zu verbessern. Für manche Studien für Rechnungsgrundlagen liegen bereits externe Tafeln vor, beispielsweise eine erstellte Tafel der DAV. Versicherungsunternehmen versuchen mit Hilfe von komplexen Verfahren ihre eigenen Beobachtungen aus den Portfolios in die vorgeschlagene DAV-Tafel einzubringen. Dafür gibt es zum Beispiel das Burning Cost Verfahren. Dieses Verfahren macht einen Abgleich von der beobachteten Gesamtschadenanzahl zur erwarteten Gesamtschadenanzahl des vorliegenden Portfolios. Daraus wird ein spezieller Quotient berechnet, der die externe Tafel um diesen Faktor erhöht bzw. senkt. In Abschnitt 3 wird der Burning Cost Ansatz näher erläutert.

Des Weiteren wird in Abschnitt 4 das Kernthema dieser Arbeit vorgestellt, ein Verfahren aus der Credibility Theorie. Diese Theorie besitzt eine große Vielfalt von Anwendungsgebieten, wie zum Beispiel das Gebiet zur „Herleitung von Rechnungsgrundlagen“. Für diese Arbeit entschied man sich für das Limited Fluctuation Verfahren. Dieses hat die Absicht Inzidenzraten über eine Linearkombination aus den beobachteten Inzidenzraten

und den Raten der vorliegenden externen Quelle herzuleiten. Das bedeutet,

$$i_j^c = i_j^a c_j + (1 - c_j) i_j^e,$$

wobei i_j^c die hergeleitete Rate über Credibility Theorie im Alter j , i_j^a die beobachtete Inzidenzrate im Alter j und i_j^e die zugrunde liegende externe Tafel ist. Die Frage ist, mit welchem Gewicht c_j lässt man die Beobachtungen i_j^a in die hergeleitete Rate eingehen. Dabei wird in Abschnitt 4.1.1 ein Kriterium zur Full-Credibility der Schadensbeobachtungen angegeben, d.h. eine minimale zu beobachtende Schadenanzahl um den Credibility-Faktor gleich eins zu setzen. Außerdem wird die Partial Credibility in Abschnitt 4.1.2 vorgestellt, welche bei Ablehnung des Full-Credibility-Kriteriums verwendet wird. Auf die Verbesserung der Credibility-Faktoren mittels Altersbändern und deren Nachteile wird im Abschnitt 4.2.3 eingegangen. Gegen Ende dieses Kapitels 4 erfolgt eine Beurteilung dieses Verfahrens.

Es gibt noch weitere Verfahren in der Credibility Theorie, wie zum Beispiel das Bühlmann-Modell oder das Bühlmann/Straub-Modell. Der Grund, warum man sich für das Limited Fluctuation Verfahren entschieden hat, liegt vor allem an dem Full-Credibility-Kriterium. Das Bühlmann-Modell ist sehr misstrauisch bzw. konservativ. Das bedeutet, es ist bei dem Bühlmann-Modell unmöglich Full-Credibility auf die eigenen Daten anzunehmen, da der Credibility-Faktor c für einen wachsenden Bestand nur langsam gegen eins strebt. Er wird erst eins, wenn man ein unendlich großes Portfolio annimmt. Die folgende Grafik aus der Literatur [8] zeigt den Verlauf des Credibility-Faktors des Bühlmann-Modells im Vergleich zu dem vom Limited Fluctuation Verfahren (LFC). Dieser Vergleich lässt sich nur dann machen, wenn die minimale zu beobachtende Schadenanzahl a^F des Limited Fluctuation Ansatzes, in dieser Grafik liegt diese bei 10.000 Schäden, 7 oder 8 mal größer ist als der Parameter K im Bühlmann-Modell. Der Parameter K ist in der Darstellung 1.400. Da das Bühlmann-Modell in dieser Arbeit nicht betrachtet wird, verweise ich für detailliertere Angaben zum Parameter K und der Umformung des Credibility-Faktors des Bühlmann-Modells für diesen Vergleich auf die Literatur [8].

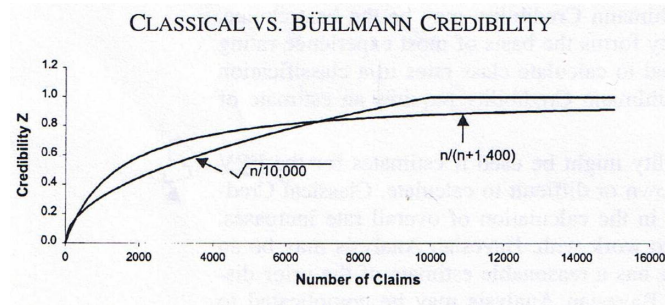


Abbildung 1.1: Vergleich Bühlmann mit LFC

Es ist zu erkennen, dass das Bühlmann-Modell ($\frac{n}{n+1400}$) zu Beginn schneller auf die Beobachtungen vertraut als das Limited Fluctuation Verfahren ($\sqrt{\frac{n}{10000}}$). Bei diesen angegebenen Formeln sei n die Anzahl der beobachteten Schäden. Aber bei größer werdender Schadenanzahl wird die Kurve des Credibility-Faktors des Bühlmann-Modells immer flacher, wo das Limited Fluctuation Verfahren irgendwann voll auf die Beobachtungen vertraut.

Nachdem mehrere Verfahren nun in dieser Arbeit vorgestellt werden, wird zum Ende dieser Arbeit in dem letzten Abschnitt 5 eine Marktsimulation durchgeführt. Diese soll die verschiedenen Verfahren für 3 Extremszenarien vergleichen und auf deren Qualität testen. Dabei wird ein „Szenario mit niedrigerer Schadenbeobachtung als erwartet“, „höherer Schadenbeobachtung als erwartet“ und „erwarteter Schadenbeobachtung“ simuliert, um Aussagen zu dem Verhalten der Verfahren bei den jeweiligen Szenarien machen zu können. Das Ziel ist es damit Angaben zur Anwendung der verschiedenen Verfahren zu machen und mögliche Vorschläge zu bringen, für welches Szenario welches Verfahren besser geeignet ist. Außerdem sollten Aussagen über die Sicherheit der Verfahren gemacht werden. Es sollte somit getestet werden, welches Verfahren eine falsche zugrunde liegende externe Tafel anhand der Beobachtungen so gut verbessert, dass diese weiterhin gute Ergebnisse liefert. In der Zusammenfassung im Abschnitt 5.6 wird ein kompakter Überblick über die Ergebnisse der Marktsimulation gegeben.

Unter anderem kommt man zu dem Schluss, dass das Limited Fluctuation Verfahren nur für Versicherungen mit einer hohen Schadenanzahlbeobachtungen geeignet ist. Außerdem sollte die zugrunde liegende externe Tafel möglichst korrekt sein, sonst ist das Limited Fluctuation Verfahren machtlos für Verbesserungen der externen Tafel bei geringen Schadenanzahlbeobachtungen. Aus diesem Grund ergibt sich in der Marktsimulation das beste Resultat für Limited Fluctuation in dem „Szenario mit erwarteter Schadenan-

zahlbeobachtung“. In den „Szenarien mit niedrigerer oder höherer Schadenerfahrung als erwartet“ war die externe Tafel falsch und die Schadenerfahrungen waren zu niedrig, um ein akzeptables Ergebnis für dieses Verfahren zu erzielen.

Im Gegensatz zu den anderen Verfahren zeigt sich das Burning Cost Verfahren dagegen besser in der Marktsimulation für das Szenario mit höherer Schadenbeobachtung als erwartet. Betrachtet man dieses Resultat im Einzelnen, so muss leider gesagt werden, dass auch Burning Cost in dieser Situation inakzeptabel abschneidet. Aber dennoch besser als Limited Fluctuation und die externe Tafel. Dieses Szenario ist für alle Versicherungsunternehmen das Ungünstigste, da man das Risiko massiv unterschätzt und somit enorme Verluste erzielen kann. Der Grund für das bessere Abschneiden des Burning Cost Verfahrens liegt in der massiven Verschiebung der externen Tafel anhand des beobachteten „Actual to Expected Werts“. In diesem Fall ist Limited Fluctuation zu misstrauisch und verbleibt lieber auf der falschen externen Tafel. Der Nachteil bei Burning Cost ist, dass es nicht den Verlauf der externen Rate verändern kann. Darum erzielt Burning Cost auch kein besseres Ergebnis als das Beobachtete.

Im Abschnitt 6 wird die gesamte Arbeit nochmal zusammengefasst und ein Ausblick auf weitere interessante Aspekte gegeben. Hierbei wäre beispielsweise eine spieltheoretische Betrachtung der Verfahrenswahl zu bestimmten Szenarien in der Marktsimulation interessant. Damit könnte man simulieren, welches Unternehmen mit welcher Strategie in welchem Szenarien-Ablauf über einen bestimmt Zeitraum positive Ergebnisse aufweist und welches nicht.

2 Herleitung von Eintrittswahrscheinlichkeiten

2.1 Problemstellung

In diesem Kapitel werden Verfahren zur Herleitung von verschiedenen Exposure E_j , d.h. beobachteten Jahresrisiken, vorgestellt. Diese können zur Schätzung der rohen Eintrittswahrscheinlichkeiten von Krankheit oder Todesfall verwendet werden. Die Eintrittswahrscheinlichkeit i_j gibt an, mit welchem Risiko der Versicherte im Alter j gefährdet ist. Sehr wichtig sind diese Erkenntnisse für die Herleitung von Rechnungsgrundlagen zur Prämienkalkulation, beispielsweise in CI-Versicherungen oder anderen Lebensversicherungen. Eine CI-Versicherung, d.h. Critical-Illness-Versicherungen, ist eine Versicherung die bei bestimmte Krankheiten, wie zum Beispiel gegen Krebs, eine Einmalzahlung leistet. Für die detailliertere Beschreibung von CI-Versicherungen wird auf die Literatur [10] verwiesen.

Die Daten, die zu diesem Zweck vorliegen, sind aus einem Versichertenbestand für Lebensversicherungen entnommen. In diesem Bestand ist eine geschlossene Menge von versicherten Personen im Alter j festgehalten, welche nun altersabhängig und über eine bestimmte Periode beobachtet wurden. Solche Beobachtungen können, wie in Literatur [9] angegeben, in einem sogenannten Lexisdiagramm darstellen werden. Jeder beobachtete Versicherte stellt in dieser Grafik ein Liniensegment dar.

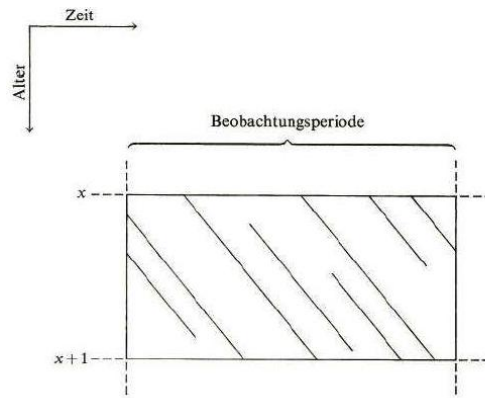


Abbildung 2.1: Lexisdiagramm

Die Schwierigkeiten, die bei der Herleitung von Eintrittswahrscheinlichkeiten auftreten können, sind:

1. Der beobachtete Versicherte kann zu Beginn oder zum Ende der Beobachtung schon ein Alter zwischen j und $j + 1$ erreicht haben.
2. Die Beobachtung setzt erst bei einem Alter zwischen j und $j + 1$ ein.

Diese beiden Fälle führen dazu, dass man unvollständige Beobachtungen vorliegen hat. Aus diesem Grund ist es notwendig das Portfolio bzw. die Jahresrisiken mit ihren eintretenden Schäden möglichst genau anzugeben. Denn diese beiden Größen sind zur Herleitung von rohen Eintrittswahrscheinlichkeiten von großer Bedeutung. Hierfür existieren eine Vielzahl von Verfahren, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden. Dazu zählen:

- Herleitung über Klassische Methode
- Herleitung über Initial Exposure to Risk
- Herleitung über Central Exposure to Risk.

2.2 Schätzung der rohen Eintrittswahrscheinlichkeiten

2.2.1 Schätzung über Klassische Methode

Die klassische Methode ist eines der im vorherigen Abschnitt genannten Verfahren zur Schätzung von rohen Eintrittswahrscheinlichkeiten. Der Grundgedanke bei diesem Verfahren ist, die erwartete Anzahl der Erkrankten gleich der beobachteten Anzahl der

Erkrankten zu setzen. Daraus wird im folgenden ein Schätzer \hat{i}_j für die Eintrittswahrscheinlichkeit i_j abgeleitet.

Es wird für den weiteren Verlauf angenommen, dass man ein vollständiges Portfolio mit n versicherten Personen hat, welche im Alter zwischen j und $j + 1$ und dem Zeitraum t und $t + 1$ beobachtet wurden. Hierbei tritt der Versicherte k im Alter $j + t_k$ in die Beobachtung ein und verlässt diese im Alter $j + s_k$ oder bei Erkrankung. Dabei gilt $0 \leq t_k \leq s_k \leq 1$.

Nachdem nun die Größen Ein- und Austrittsalter eines Versicherten für einen Beobachtungszeitraum bereitgestellt wurden, kann nun die Anzahl der Jahresrisiken (Exposure) mit der Formel

$$E_j = \sum_{k=1}^n (s_k - t_k) \quad (2.1)$$

allgemein definiert werden. Dieser Ausdruck gibt somit den Zeitraum an, in dem die Versicherten unter Risiko standen.

Ebenfalls definiert man die im folgenden verwendete Indexmenge K als die Menge aller Versicherten k , bei denen eine Erkrankung festgestellt wurde. Nun kann die erwartete Anzahl der Erkrankten angegeben werden mit

$$e_j = \sum_{k=1}^n {}_{1-t_k}i_{j+t_k} - \sum_{k \notin K} {}_{1-s_k}i_{j+s_k}, \quad (2.2)$$

wobei ${}_{1-t_k}i_{j+t_k}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein $(j + t_k)$ -jähriger Versicherter bis zum Zeitpunkt $j + 1$ erkrankt. Die Wahrscheinlichkeit ${}_{1-s_k}i_{j+s_k}$ wird analog dazu definiert.

In der Formel (2.2) gibt somit der erste Term die Erwartung an, dass alle n versicherten $(j + t_k)$ -jährigen Personen bis zum Zeitpunkt $j + 1$ erkranken. Dabei müssen aber die Versicherten berücksichtigt werden, die in dem Beobachtungszeitraum das Alter $j + s_k$ erreicht haben und somit aus der Beobachtung fallen. Folglich müssen diese Erkrankten von dem ersten Term abgezogen werden und dies wird mit dem zweiten Term realisiert. Damit wird gesichert, dass man auch wirklich nur die Erkrankten aus dem Beobachtungszeitraum erwartet.

Es wird nun die verfahrenstechnische Annahme

$${}_{1-u}i_{j+u} = (1 - u)i_j$$

zugrunde gelegt, dass die Eintrittswahrscheinlichkeiten über das Alter j konstant bleiben. Aufgrund dieser Annahme kann die Formel (2.2) für die Anzahl der erwarteten

Erkrankten vereinfacht werden in der Form

$$e_j = \sum_{k=1}^n (1 - t_k) i_j - \sum_{k \notin K} (1 - s_k) i_j.$$

Nach wenigen Überlegungen und der Anwendung der Formel (2.1) gilt die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n (1 - t_k) i_j - \sum_{k \notin K} (1 - s_k) i_j = E_j i_j + \sum_{k \in K} (1 - s_k) i_j. \quad (2.3)$$

Um dies nachzuprüfen, zieht man den Term $E_j i_j = \sum_{k=1}^n (s_k - t_k) i_j$ von der linken und rechten Seite ab. Dabei wird deutlich, dass man von dem Term $\sum_{k \notin K} (1 - s_k) i_j$ die Versicherten mit beobachteter Erkrankung zu viel abzieht. Dementsprechend muss diese Differenz $\sum_{k \in K} (1 - s_k) i_j$ zu der rechten Seite der Gleichung hinzu addiert werden, damit diese erfüllt ist.

Für den weiteren Verlauf wird die Anzahl der beobachteten Erkrankten zwischen dem Alter j und $j + 1$ mit der Zufallsvariable A_j und der dazugehörigen Realisierung a_j bezeichnet.

Wie bereits oben als Grundgedanke der klassischen Methode erwähnt, wird nun in der Formel (2.3) die erwartete Anzahl der Erkrankten e_j mit der beobachteten Anzahl der Erkrankten A_j gleichgesetzt. Nun kann die Erkrankungswahrscheinlichkeit mit der folgenden Formel geschätzt werden.

$$\hat{i}_j = \frac{a_j}{E_j + \sum_{k \in K} (1 - s_k) i_j}.$$

Dieses Verfahren ist zwar leicht zu realisieren und bietet akzeptable Schätzungen für große Datenmengen, dennoch ist es für einen kleinen Datenbestand nicht geeignet. Es kann hierbei passieren, dass der Zähler größer wird als der Nenner, da der Nenner kein ganzzahliger Wert sein muss. Damit werden Eintrittswahrscheinlichkeiten berechnet, die größer sind als eins.

Bemerkung 1 *In der Praxis ist es oft der Fall, dass der Nenner näherungsweise berechnet wird. Man geht in diesem Fall davon aus, dass die meisten Erkrankungen bzw. Todesfälle in der Mitte des Jahres eintreten. Aus diesem Grund kann die Eintrittswahrscheinlichkeit i_j mit der Formel*

$$\hat{i}_j = \frac{a_j}{\sum_{k=1}^n (s_k - t_k) + \frac{1}{2} a_j}$$

näherungsweise berechnet werden.

Für genauere Angaben zur Theorie der klassischen Methode wird auf die Literatur [9] verwiesen.

2.2.2 Schätzung über Initial Exposure to Risk

Diese Schätzung der Eintrittswahrscheinlichkeiten i_j über Initial Exposure to Risk unterscheidet sich maßgeblich von der klassischen Methode in der Zusammensetzung des Exposure. Hierbei wird angenommen, dass alle betrachteten Versicherten in dem Initial Exposure E_j^i zu Beginn des Jahres im Alter j sind. Diese werden solange beobachtet bis sie erkranken oder das Ende des Jahres ohne Erkrankung überstehen. Das bedeutet, es wird die Anzahl der beobachteten Erkrankungen A_j im Alter j unter diesem Bestand gezählt.

Bemerkung 2 *Es ist zu erwähnen, dass neu verkaufte Policen innerhalb des Jahres ignoriert werden und somit auch deren eventuelle Erkrankung. Das bedeutet, man betrachtet eine geschlossene Menge von Versicherten vom Zeitpunkt t bis $t + 1$.*

Unter der Annahme, dass die beobachteten Schäden im Jahr unabhängig voneinander sind und das erste Mal auftreten, kann A_j als binomialverteilt angenommen werden mit den Parametern E_j^i und i_j . Damit kann als Erwartungswert für die beobachteten Schäden $E[A_j] = E_j^i i_j$ und deren Varianz $V[A_j] = E_j^i i_j (1 - i_j)$ angegeben werden. Zur Schätzung der unbekannten Eintrittswahrscheinlichkeiten i_j verwendet man nun den Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{i}_j = \frac{a_j}{E_j^i}. \quad (2.4)$$

Dies ist derselbe Schätzer, der auch bei der klassischen Methode erhalten wird. Dabei ist nur das Exposure anders zusammengesetzt. Leider vernachlässigt dieses Verfahren für die Erfassung des Exposures eine große Anzahl an Versicherten, da hinzukommende Policen in der Mitte des Jahres ignoriert werden und somit auch deren eventuelle Erkrankung. Das bedeutet, diese Methode ist nur für geschlossene Bestände geeignet.

2.2.3 Schätzung über Central Exposure to Risk

Das Verfahren über Central Exposure kann im Vergleich zur klassischen Methode auch auf kleine Datenbestände angewendet werden. Man nimmt hierfür ebenfalls an, wie in der klassischen Methode beschrieben, dass n Versicherte im Alter zwischen j und $j + 1$ im Zeitraum t bis $t + 1$ beobachtet werden. Dabei definiert man, dass der Versicherte k im Alter $j + t_k$ in die Beobachtung eintritt und diese bei Erreichen des Alters $j + s_k$ bzw. bei Erkrankung verlässt.

Das Gesamtexposure wird somit wie in Abschnitt 2.2.1 definiert, d.h.

$$E_j^c = \sum_{k=1}^n (s_k - t_k).$$

Die Erkrankungsintensität μ_j im Alter j wird als konstant für alle Versicherten innerhalb der Alter j und $j+1$ und den Zeiträumen t und $t+1$ angenommen, d.h. $\mu_{j+\zeta} = \mu_j$ für $0 \leq \zeta \leq 1$. Mathematisch ist diese Größe als die Ableitung der Erkrankungswahrscheinlichkeit nach der Zeit t zu interpretieren.

Anders als bei dem Initial Exposure wird der beobachteten Anzahl der Erkrankten A_j eine Poissonverteilung zugrunde gelegt. Um zu zeigen, dass diese Verteilungsannahme gerechtfertigt ist, benötigt man folgende Beziehungen

$$\mu_j = -\ln p_j, \text{ wobei gilt } p_j = 1 - i_j \quad (2.5)$$

und

$$\tau p_j = e^{-\tau \mu_j}, \text{ wobei gilt } 0 \leq \tau \leq 1. \quad (2.6)$$

Dies bedeutet, dass die Erkrankungsintensität, wie bereits oben erwähnt, über das Alter j bis $j+1$ konstant ist. Für nähere Erklärungen zu diesen Beziehungen wird auf die Literatur [9] verwiesen. Die n beobachteten Versicherten im Alter j werden nun mit

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{falls Versicherter } k \text{ erkrankt,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

verknüpft, wobei $k = 1, \dots, n$ gilt. Außerdem definiert man τ_k als den Zeitraum in dem der Versicherte k vor seinem $(j+1)$ -ten Geburtstag nicht erkrankt. Nun kann man die folgenden zwei möglichen Ereignisse für jeden Versicherten k wahrscheinlichkeitstheoretisch beschreiben, wenn (δ_k, τ_k) unabhängig und identisch verteilt sind.

- Wenn der Versicherte k den $(j+1)$ -ten Geburtstag ohne Erkrankung erreicht, dann gilt $(\delta_k = 0, \tau_k = 1)$

$$p_j = e^{-\mu_j}$$

- Wenn der Versicherte k vor dem $(j+1)$ -ten Geburtstag erkrankt, dann gilt $(\delta_k = 1, \tau_k < 1)$

$$\tau_k p_j \mu_j e^{-\tau_k \mu_j} = \mu_j e^{-\tau_k \mu_j}$$

Allgemein können diese beiden Ausgänge in der Formel

$$e^{(-\tau_k \mu_j)} (\mu_j)^{\delta_k}$$

zusammengefasst werden. Nun gilt, dass $\tau = \sum_{k=1}^n \tau_k = E_j^c$ und $\delta = \sum_{k=1}^n \delta_k = A_j$ ist. Somit ergibt sich für μ_j die Likelihood-Funktion

$$\begin{aligned} L(\mu_j) &= \prod_{k=1}^n e^{(-\tau_k \mu_j)} (\mu_j)^{\delta_k} \\ &= e^{(-\tau \mu_j)} (\mu_j)^\delta \\ &= e^{(-E_j^c \mu_j)} (\mu_j)^{A_j} \end{aligned}$$

Leitet man diese Likelihood-Funktion nun nach μ_j ab und setzt diese gleich Null, bekommt man den Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{\mu}_j = \frac{a_j}{E_j^c}$$

für die Erkrankungsintensität μ_j . Als Nachweis, dass an dieser Stelle der Likelihood-Funktion tatsächlich ein Maximum liegt, wird das Endergebnis der zweiten Ableitung $L''\left(\frac{A_j}{E_j^c}\right)$ angegeben.

$$L''\left(\frac{A_j}{E_j^c}\right) = -\frac{(A_j)^{A_j-1} e^{-A_j}}{(E_j^c)^{A_j-2}} < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum}$$

Aufgrund der oben genannten ‘‘Balducci-Annahme‘‘ (2.5) kann nun der Maximum-Likelihood-Schätzer für i_j wie folgt formuliert werden.

$$\hat{i}_j = 1 - e^{-\frac{a_j}{E_j^c}} \quad (2.7)$$

Die Likelihood-Funktion ist proportional zur Poisson-Likelihood

$$e^{(-E_j^c \mu_j)} \frac{(E_j^c \mu_j)^{A_j}}{A_j!}.$$

Damit ist die Verwendung der Poissonverteilung für $A_j \sim \text{Poisson}(E_j^c \mu_j)$ gerechtfertigt. Der Vorteil von diesem Verfahren ist, dass es auch bei einer geringen Anzahl von Daten gut arbeitet. Dabei wird garantiert, dass die geschätzten Eintrittswahrscheinlichkeiten zwischen Null und eins liegen. Außerdem werden alle Daten für die Betrachtung verwendet. Dies war bei Initial Exposure nicht der Fall.

3 Die Burning Cost Methode

Die „Burning Cost Methode“ ist ein Verfahren, welches zur Anpassung der bisherigen Rechnungsgrundlagen anhand von eigenen Beobachtungen dient. In der Literatur ist dieser Ansatz auch bekannt unter dem Namen „One Size fits all-Approach“.

Als Anwendungsbasis für diese Methode wurden Versicherte über einen bestimmten Zeitraum beobachtet und sowohl deren Erkrankungen als auch die Exposure erfasst. Aufgrund einer gegebenen externen Rate i_j^e , beispielsweise einer externen DAV-Tafel, war es nun möglich die erwartete Gesamtschadenhöhe e_j^X im Alter j mit der Formel

$$e_j^X = i_j^e E_j^X = i_j^e \sum_{i=1}^{n_j} E_{ij} X_{ij} \quad (3.1)$$

zu berechnen. Hierbei ist $E_j^X = \sum_{i=1}^{n_j} E_{ij} X_{ij}$ das Gesamtexposure im Alter j multipliziert mit den Versicherungssummen X_{ij} . Das heißt, X_{ij} ist die Versicherungssumme des i -ten Versicherten im Alter j und E_{ij} ist sein Exposure.

Nach dem die Erwartungen der Gesamtschadenhöhe gegeben waren, musste die beobachtete Gesamtschadenhöhe a_j^X pro Alter j aus dem gegebenen Portfolio ermittelt werden. Dies realisierte man mit der Formel

$$a_j^X = \sum_{i=1}^{n_j} a_{ij} X_{ij}, \quad (3.2)$$

wobei für a_{ij} gilt

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i - \text{ter Versicherter im Alter } j \text{ erkrankt} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Der Grundgedanke des Burning Cost Ansatzes liegt nun darin, den beobachteten Gesamtschaden a^X mit dem erwarteten Gesamtschaden e^X zu vergleichen. Dies geschieht über den Quotienten Q , den sogenannten „Actual-to-Expected-Wert“

$$Q = \frac{a^X}{e^X} = \frac{\sum_{j=0}^{\omega} a_j^X}{\sum_{j=0}^{\omega} e_j^X},$$

wobei ω das maximale Alter j ist, für das noch Versicherungsnehmer im Bestand beobachtet werden, d.h. $\omega = \max\{j | E_{ij} > 0\}$. An diesem Wert Q ist zu erkennen, ob die Erwartungen mit den Beobachtungen übereinstimmen oder voneinander abweichen.

Bemerkung 3 *Dieser Abgleich zwischen Beobachtung und Erwartung, welcher über den „Actual to Expected Wert“ Q erfolgt, kann ebenfalls mit der Gesamtschadenanzahl realisiert werden. Der Grund für die Verwendung der Gesamtschadenhöhen ist, dass diese die eigentlichen Unterschiede zwischen Erwartung und Beobachtung widerspiegeln. Es gelingt somit eine bessere Approximation für die tatsächlichen Kosten.*

Bei der Berechnung des „Actual to Expected Werts“ können drei verschiedene Beobachtungen gemacht werden:

1. Der Quotient Q ist deutlich kleiner als eins, d.h. $Q \ll 1$, dann sind die Erwartungen möglicherweise zu hoch. Das hätte zur Folge, dass die jetzigen Preise gesenkt werden könnten, um wettbewerbsfähig zu bleiben.
2. Wenn der Quotient Q deutlich größer ist als eins, d.h. $Q \gg 1$, dann sind die Erwartungen möglicherweise viel zu niedrig. Das hätte zur Folge, dass die Preise der Versicherungen angehoben werden müssten.
3. Wenn der Quotient gleich eins ist, so stimmen die Rechnungsgrundlagen mit den Beobachtungen genau überein.

Die folgende Tabelle illustriert dieses Vorgehen für die Alter 20 – 25 an einem selbst gewählten Beispiel.

Alter j	Exposure E_j^X	a_j^X	e_j^X	i_j^e	Q_j
20	€493.585.634	€450.000	€136.229,64	0,0276%	330%
21	€602.046.080	€0	€178.205,64	0,0296%	0%
22	€730.700.381	€100.000	€230.901,32	0,0316%	43%
23	€861.153.571	€90.000	€289.347,60	0,0336%	31%
24	€960.200.174	€243.539	€339.910,86	0,0354%	71%
25	€1.040.840.191	€497.041	€387.192,55	0,0372%	128%
Gesamt	€4.688.526.031	€1.380.580	€1.561.787,61		Q : 88,39%

Für dieses spezielle Beispiel bekommt man eine Abweichung von 11,61% heraus. Das würde in der Praxis bedeuten, die bisherigen Rechnungsgrundlagen überschätzen die

wahren Beobachtungen. Es ist aber auch oft der Fall, dass die erwarteten Schäden unterschätzt werden. Das heißt, der „Actual to Expected Wert“ Q ist größer eins. Für das Beispiel könnten nun die bisherigen Inzidenzraten i_j^e um die beobachtete Abweichung $q = |100\% - Q| = 11,61\%$ gesenkt werden. Das bedeutet für die Rate des Burning Cost Verfahren:

$$i_j^Q = i_j^e Q$$

Bemerkung 4 *Die Burning Cost Methode wird häufig für einen kleinen Datenbestand verwendet, da statistische Methoden bei geringen Datenbeständen oft zu keinem akzeptablen Ergebnis führen. Der Nachteil hierbei ist, dass zufällige Schwankungen der Beobachtung in die Rechnungsgrundlagen mit aufgenommen werden.*

Dieses Vorgehen ist sehr einfach zu realisieren. Dennoch besteht ein Nachteil, wenn man die Einzelalter betrachtet. In dem obigen Beispiel wird deutlich, dass die Annahme der Senkung der Rechnungsgrundlagen in Bezug auf die Einzelalter im Allgemeinen nicht vertretbar ist. Beispielsweise im Alter 24 in der obigen Tabelle sollte die externe Rate i_{24}^e noch mehr nach unten korrigiert werden. Für das Alter 25 wäre dagegen eine Korrektur der Rate i_{25}^e nach oben angebracht. Dabei muss aber entschieden werden, in wie weit es sich um Zufallsschwankungen in den einzelnen Beobachtungen handelt. Außerdem wird bei dem Burning Cost Ansatz lediglich eine Parallelverschiebung der externen Rate i^e durchgeführt. Das würde bedeuten, wenn die Schadenbeobachtungen untypisch verlaufen, d.h. in jungen Altern sehr hoch sind und in höheren Jahren niedrig, wäre Burning Cost machtlos bei der Anpassung, da es nicht die Form der Kurve ändern kann.

Zusammenfassend muss man sagen, dass die altersbezogenen „Actual to Expected Werte“ Q_j in den einzelnen Altern stark schwanken. Dies stellt natürlich die Anwendung eines einzigen Korrekturfaktors Q über die gesamten Alter in Frage. Im Abschnitt 5 wird jedoch gezeigt, dass der Burning Cost Ansatz für manche Marktsituationen durchaus ein gutes Verfahren ist. Dennoch ist das angesprochene Problem, dass Burning Cost nicht die Form der Kurve der externen Rate ändern kann, ein großer Nachteil. Es wäre somit sinnvoll andere Methoden zur Herleitung neuer Rechnungsgrundlagen zu betrachten.

Die Credibility Theorie bietet dafür nützliche Ansätze. Diese haben den Vorteil, dass die neuen Inzidenzraten unabhängig von jedem Alter gebildet werden können. In dem Abschnitt 4 wird ein solches Verfahren näher vorgestellt, welches bei großer Anzahl von Schadenbeobachtungen auch die Form der Kurve ändern kann.

4 Der Limited Fluctuation Approach

Die Credibility-Theorie ist im Laufe der Zeit zu einem großen Zweig in der mathematischen Statistik geworden, welcher eine Vielzahl von statistischen Verfahren enthält. Eines der ältesten Verfahren ist der Limited Fluctuation Ansatz, auch bekannt unter dem Namen „American Credibility“. Dieser wurde sehr früh im 20. Jahrhundert von dem Mathematiker Mowbray 1917 entwickelt und seitdem immer wieder verbessert.

In dem ersten Unterabschnitt 4.1 wird die mathematische Theorie zu diesem Ansatz ohne jeglichen Bezug auf einen konkreten Sachverhalt vorgestellt. Auf die Anwendung in der Praxis (speziell für Inzidenzraten) wird im zweiten Unterabschnitt 4.2 eingegangen. Zum Schluss dieses Kapitels werden Vor- und Nachteile, sowie ein Beispiel zu diesem Verfahren illustriert.

Das Ziel dieses Ansatzes ist es einen Credibility-Faktor $c \in [0, 1]$ herzuleiten, der ein Maß für die Glaubwürdigkeit der eigenen Schadenserfahrungen darstellt. Mathematisch kann man sich eine Linearkombination aus beobachteter Gesamtschadenhöhe s und auf externe Quellen basierender Gesamtschadenhöhe S vorstellen, d.h.

$$\hat{S} = sc + (1 - c)S, \quad (4.1)$$

Das heißt, es wird ein „Kompromiss-Schätzer“ für die mittlere Schadenhöhe zwischen der Beobachtung und der Erwartung gesucht.

Bemerkung 5 Diese Credibility-Formel kann auch in Bezug auf Inzidenzraten (Eintrittswahrscheinlichkeiten) angewendet werden, wie es in dem Abschnitt 4.2 der Fall ist.

Dieser Ansatz ist unterteilt in zwei Bereiche, „Full-Credibility“ und „Partial-Credibility“. Die Full-Credibility gibt ein Kriterium hinsichtlich der vollen Glaubwürdigkeit der eigenen Schadensbeobachtungen an, d.h. wenn das Kriterium erfüllt ist, gilt für den Credibility-Faktor $c = 1$. Wenn keine „Full-Credibility“ vorliegt, kann stets das „Partial-Credibility-Verfahren“ angewendet werden mit einem Credibility-Faktor c zwischen 0 und 1 als Resultat. Diese beiden Verfahren werden in diesem Kapitel vorgestellt. Hierfür wurde vor

allein die Literatur [2], [3] und [5] herangezogen.

4.1 Modell - Limited Fluctuation Credibility

4.1.1 Full - Credibility

In diesem Abschnitt wird ein Entscheidungskriterium bereitgestellt, unter dem die volle Glaubwürdigkeit der Schadenerfahrungen angenommen werden kann. Dieses Entscheidungskriterium wird die minimale Anzahl der zu beobachtenden Schäden für den Beobachtungszeitraum angeben, die benötigt wird, um Full-Credibility auf die Datenerfahrungen anzunehmen.

Man stelle sich eine Klasse von Versicherungsnehmern mit Versicherungspolicen i vor, für die vergangene Schadenerfahrungen X_i beobachtet wurden. Damit ergibt sich für die Beobachtung der Gesamtschadenhöhe S in einer Klasse die Formel

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

Die Schadenanzahl N wird als poissonverteilte Zufallsgröße mit dem Parameter λ angenommen. Somit ist bekannt, dass für den Erwartungswert und die Varianz der Schadenanzahl $E[N] = V[N] = \lambda$ gilt. Es wird außerdem angenommen, dass die erwartete Schadenhöhe und deren Varianz über alle Policen i konstant bleiben, d.h.

$$E[X_i] = \mu \tag{4.2}$$

$$V[X_i] = \sigma^2. \tag{4.3}$$

Somit ergibt sich auch für die mittlere erwartete Schadenhöhe $E[\bar{X}] = \mu$. Die Grundannahme dieses Full-Credibility-Ansatzes besteht darin, dass der Versicherer entscheiden muss, welches Risiko er bei der Schwankung des Gesamtschadens S bereit ist einzugehen. Das bedeutet, um wie viel darf die wahre Gesamtschadenhöhe s von der geschätzten Gesamtschadenhöhe S abweichen? Somit ergibt sich das Konfidenzintervall

$$P(-rs < S - s < rs) = 1 - \alpha, \tag{4.4}$$

wobei für den Spannweitenparameter $r > 0$ und für das Wahrscheinlichkeitsniveau $0 < 1 - \alpha < 1$ gilt. Im Allgemeinen können diese Parameter aber individuell festgelegt werden. In Abschnitt 4.3 wird eine Tabelle zur Wahl der Parameter angegeben. Dennoch kommt

es auf die Risikoaversion des Versicherers an. Hierbei gilt, je kleiner r und α gewählt werden, umso mehr Schäden muss man für Full Credibility mindestens beobachten.

Diese Grundannahme (4.4) kann modifiziert werden zu dem Ausdruck

$$P\left(\frac{-rs}{\sqrt{V[S]}} < \frac{S-s}{\sqrt{V[S]}} < \frac{rs}{\sqrt{V[S]}}\right) = 1 - \alpha. \quad (4.5)$$

Auf diese Form kann bei einer hinreichend großen Schadenanzahlerwartung der zentrale Grenzwertsatz angewendet werden. Das hat zur Folge, dass die Zufallsvariable $\frac{S-s}{\sqrt{V[S]}}$ einer Standardnormalverteilung unterliegt. Somit ergibt sich aus der Formel (4.5)

$$\frac{rs}{\sqrt{V[S]}} = x_\alpha, \quad (4.6)$$

wobei x_α den Punkt auf der standardisierten Normalverteilung angibt, bei dem die Fläche unter der Kurve zwischen $-x_\alpha$ und x_α die Größe $1 - \alpha$ hat.

Für die weitere Herleitung des Full Credibility Kriteriums muss zunächst folgendes Lemma angegeben werden. Dieses Lemma wird für den Beweis des Satzes 4.1 verwendet.

Lemma 4.1 *Gegeben sei eine diskrete Zufallsgröße N mit der erzeugenden Funktion g_N und eine Folge identisch verteilter stetiger Zufallsgrößen X_i , $i = 1, 2, \dots$ mit der gemeinsamen momentenerzeugenden Funktion g_X . Diese Zufallsgrößen X_i sind stochastisch unabhängig. Somit kann die momentenerzeugende Funktion einer Zufallsgröße $S = \sum_{i=1}^N X_i$ berechnet werden mit*

$$M_S(u) = g_N(M_X(u)). \quad (4.7)$$

Beweis 4.1 von Lemma 4.1

Zunächst werden folgende Größen definiert:

- $M_S(u)$ momentenerzeugende Funktion der Zufallsgröße S
- $g_N(u)$ erzeugende Funktion der Zufallsgröße N
- $M_X(u)$ momentenerzeugende Funktion der Zufallsgröße X

Es gilt nach der Definition der momentenerzeugenden Funktion einer Zufallsgröße $S = \sum_{i=1}^N X_i$:

$$M_S(u) = E[e^{tS}] = E[e^{t \sum_{i=1}^N X_i}] = E\left[\prod_{i=1}^N e^{tX_i}\right] \quad (4.8)$$

Da die Schadenhöhen X_i als unabhängig und identisch verteilt angenommen werden, ergibt sich Formel (4.8) zu

$$M_S(u) = E[e^{tX}]^N$$

Betrachtet man nun die Erwartung von $E[e^{tX}]^N$, d.h. $E[E[e^{tX}]^N]$, so kann man nach der Definition der momentenerzeugenden Funktion $s = M_X(u) = E[e^{tX}]$ substituieren. Demnach ergibt sich

$$M_S(u) = E[s^N]$$

Dies wiederum ist die erzeugende Funktion der Zufallsgröße N . Somit gilt $M_S(u) = g_N(M_X(u))$.

q.e.d.

Nach dem nun das Lemma 4.1 bewiesen ist, wird der eigentliche Satz für die Herleitung des Full Credibility Kriteriums angegeben. Er ist auch bekannt unter dem Namen „Satz zum Kollektiven Modell“.

Satz 4.1 zum Kollektiven Modell

Es seien X_i , $i = 1, \dots, n$ unabhängig identisch verteilte und von N unabhängigen Zufallsgrößen, die die Schadenhöhen beschreiben. Außerdem sei N eine Zufallsgröße, die die Schadenanzahl angibt. Dann gilt für die erwartete Gesamtschadenhöhe $S = \sum_{i=1}^N X_i$:

$$E[S] = E[N]E[X] = \lambda\mu$$

und für die Varianz:

$$V[S] = E[N]V[X] + V[N](E[X])^2 = \lambda(\sigma^2 + \mu^2).$$

Beweis 4.2 Es sei $M_S(u)$ die momentenerzeugende Funktion der Gesamtschadenhöhe S , $M_X(u)$ die momentenerzeugende Funktion der Schadenhöhe X und $g_N(u)$ die erzeugende Funktion der Gesamtschadenanzahl N . Nun gilt nach Lemma 4.1:

$$M_S(u) = g_N(M_X(u))$$

Als Eigenschaft der momentenerzeugenden Funktionen M ist bekannt, dass die k -te Ableitung von $M(u)$ an der Stelle „ $u = 0$ “ das k -te Moment angibt. Das bedeutet für S :

$$1 = M_S(0)$$

$$E[S] = M'_S(0)$$

$$E[S^2] = M''_S(0)$$

$$V[S] = M''_S(0) - (M'_S(0))^2$$

Außerdem besitzt die erzeugende Funktion eine Zufallsgröße N die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} E[N] &= g'_N(1) \\ E[N(N-1)] &= g''_N(1) \end{aligned}$$

Nach dem Differenzieren der Formel (4.7) nach u , folgt $M'_S(u) = g'_N(M_X(u))M'_X(u)$. Setzt man nun $u = 0$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} E[S] &= M'_S(0) \\ &= g'_N(M_X(0))M'_X(0) \\ &= g'_N(1)E[X] \\ &= E[N]E[X] = \lambda\mu \end{aligned}$$

Der Nachweis für die Varianz läuft analog dazu.

$$\begin{aligned} V[S] &= E[S - E[S]]^2 \\ &= E[S]^2 - (E[S])^2 \\ &= M''_S(0) - (M'_S(0))^2 \\ &= E[N](E[X^2] - (E[X])^2) + (E[X])^2E[N^2] - (E[N]E[X])^2 \\ &= E[N]V[X] + (E[X])^2V[N] \\ &= \lambda\sigma^2 + (\mu)^2\lambda = \lambda(\sigma^2 + \mu^2) \end{aligned}$$

q.e.d.

Ersetzt man nun in der Formel (4.6) s und $V[S]$ mit den Ergebnissen aus dem Satz 4.1, so ergibt sich

$$\frac{r\lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\sigma^2 + \mu^2)}} = x_\alpha.$$

Diese Formel wird nun nach λ umgestellt und $\lambda_F = \lambda$ als minimale Anzahl der zu beobachtenden Schäden definiert. Als Ergebnis erhält man

$$\lambda = \lambda_F = \frac{x_\alpha^2}{r^2} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \right], \quad (4.9)$$

wobei $x_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ ist.

Die Formel (4.9) ist das oben angekündigte Kriterium für die volle Glaubwürdigkeit der Beobachtungen. Wenn also die beobachtete Schadenanzahl oberhalb von λ_F liegt, so kann man den Credibility-Faktor $c = 1$ setzen. Daraus folgt, dass der in Ausdruck (4.1) beschriebene „Kompromiss-Schätzer“ $\hat{\mu} = \bar{X}$ ist. Wenn das nicht der Fall ist, so muss die Partial Credibility angewendet werden.

4.1.2 Partial - Credibility

Die Partial-Credibility ist ein Verfahren des Limited Fluctuation Ansatzes, welches genau dann in Erscheinung tritt, wenn keine volle Glaubwürdigkeit auf die Schadenerfahrung angenommen werden kann. Das bedeutet, wenn die beobachtete Schadenanzahl kleiner als die minimale zu beobachtende Schadenanzahl ist.

Für dieses Verfahren wird angenommen, dass für den Schätzer $cS - cs$ nur eine gewisse prozentuale Schwankung um r akzeptiert wird, d.h.

$$P(-rs < cS - cs < rs) = 1 - \alpha$$

Dieser Ausdruck ist erneut äquivalent zu

$$P\left(\frac{-rs}{c\sqrt{V[S]}} < \frac{S-s}{\sqrt{V[S]}} < \frac{rs}{c\sqrt{V[S]}}\right) = 1 - \alpha. \quad (4.10)$$

Bei einer ausreichend großen Schadenerfahrung kann nun der zentrale Grenzwertsatz angewendet werden.

Bemerkung 6 *Unter der hinreichend großen Schadenerfahrung versteht man die Anzahl der Schäden, die beobachtet werden müssen, um den zentralen Grenzwertsatz und nicht um Full Credibility anwenden zu können. Eine Faustformel von Lindeberg/Levy besagt, dass mindestens 31 Schäden beobachtet werden müssen. Natürlich sind bei der Anwendung der Partial-Credibility nur sehr wenig Schadenbeobachtungen vorhanden. Dennoch wird für dieses Modell angenommen, dass genügend Schadenbeobachtungen vorhanden sind, um den Zentralen Grenzwertsatz anwenden zu können.*

Somit wird die Zufallsvariable $\frac{S-s}{\sqrt{V[S]}}$ als standardnormalverteilt angenommen und es ergibt sich aus (4.10) die Formel

$$\frac{rs}{c\sqrt{V[S]}} = x_\alpha.$$

Substituiert man hier ebenfalls s und $V[S]$ mit den Ergebnissen aus Satz 4.1, erhalten wir

$$\frac{r\lambda\mu}{c\sqrt{\lambda(\sigma^2 + \mu^2)}} = x_\alpha$$

und können diese Formel nach c umstellen. Als Ergebnis erhält man einen Ausdruck zur Berechnung des Credibility-Faktors c .

$$c = \frac{\sqrt{\lambda}}{\frac{x_\alpha}{r}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_F}}, \quad (4.11)$$

wobei λ die beobachtete Schadenanzahl und λ_F die minimale Anzahl der zu beobachtenden Schäden ist.

Die folgende Darstellung zeigt den Algorithmus des Limited Fluctuation Ansatz auf. Dieser soll noch einmal den Sinn des Full Credibility Verfahrens und das Ausweichen auf das Partial Credibility Verfahren zeigen. Im Anhang befindet sich das MatLab-Programm „Hp-LCF“, welches zu praktischen Zwecken programmiert wurde.

Algorithmus 1 *Limited Fluctuation (Algorithmus)*

Voraussetzungen:

- N ist poissonverteilt
- $E[X]$ und $V[X]$ werden als konstant über alle Policen i angesehen

1.Schritt

Lege die Größen α und r fest.

2.Schritt

Schätze $E[X]$ und $V[X]$.

3.Schritt

Nutze Ausdruck (4.9) für die Berechnung der benötigten minimalen Schadenanzahl λ_F zur Annahme der Full-Credibility.

4.Schritt

Wenn gilt $\lambda > \lambda_F$, dann setze $c = 1$,

sonst nutze Ausdruck (4.11) zur Berechnung der Credibility-Faktors $c \in [0, 1]$.

Ausgabe

Geschätzter Credibility-Faktor c .

In dem folgenden Abschnitt 4.2 wird das Verfahren Limited Fluctuation auf den Sachverhalt „Inzidenzraten“ angewendet.

4.2 Der Limited Fluctuation Approach und Inzidenzraten

Nun wird die vorgestellte Theorie aus dem Abschnitt 4.1 auf die Herleitung von Rechnungsgrundlagen angewendet. Dafür wurde zu Beginn eine feste Menge von Versicherten über einen bestimmten Zeitraum beobachtet. Daraus entnahm man Informationen über die Größe der Jahresrisiken multipliziert mit deren Versicherungssummen

$$E_j^X = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} E_{ij} \quad (4.12)$$

und die beobachteten Gesamtschadenhöhen

$$a_j^X = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} a_{ij} \quad (4.13)$$

im Alter j . Hierfür gilt die Annahme 3.3 aus dem Abschnitt 3. Aus diesen beiden Größen konnte die „beobachtete Inzidenzrate i_j^a “ über die Formel

$$\hat{i}_j^a = \frac{a_j^X}{E_j^X} \quad (4.14)$$

geschätzt werden. Das Ziel war es nun, Inzidenzraten über die Credibility-Theorie (Limited Fluctuation Credibility) herzuleiten. Für diesen Fall musste die Formel (4.1) umgewandelt werden zu

$$i_j^c = \frac{a_j^X}{E_j^X} c_j + (1 - c_j) i_j^e, \quad (4.15)$$

wobei i_j^e die erwartete Inzidenzrate im Alter j aus einer bekannten externen Tafel ist und i_j^c die Inzidenzrate über Credibility-Theorie. In dem folgenden Abschnitt wird nun nachgewiesen, dass die allgemeine Theorie auf diesen Sachverhalt angewendet werden kann. Als Resultat konnte ein Verfahren entwickelt werden, welches den Credibility-Faktor für die beobachteten Inzidenzraten i_j^a herleitete.

4.2.1 Die Anwendung auf Inzidenzraten

Zunächst sollte erwähnt werden, dass die Annahmen (4.2) und (4.3) auch für diesen Praxisfall getroffen werden. Das bedeutet,

$$E[X_{ij}] = \mu_j$$

$$V[X_{ij}] = \sigma_j^2,$$

wobei X_{ij} die Versicherungssumme des i -ten Versicherten im Alter j ist. Diese Größen werden mit den Schätzern

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{E_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} E_{ij} \quad (4.16)$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{(E_j - 1)} \sum_{i=1}^{n_j} E_{ij} (X_{ij} - \hat{\mu}_j)^2 \quad (4.17)$$

berechnet, wobei $E_j = \sum_{i=1}^{n_j} E_{ij}$ ist.

Es soll nun ein Schätzer für die beobachtete Eintrittswahrscheinlichkeit i_j^a im Alter j angegeben werden. Dafür hat man aus der Menge der Versicherten im Alter j die Erkrankten mit den dazugehörigen Versicherungssummen beobachtet und mit der Formel

(4.13) berechnet. Die Anzahl der Jahresrisiken multipliziert mit der Versicherungssumme berechnete man mit der Formel (4.12). Nun konnte mit der Formel (4.14) ein geeigneter Schätzer \hat{i}^a_j für die beobachtete Erkrankungsrate i^a_j berechnet werden.

Jetzt muss die Grundannahme (4.4) aus der allgemeinen Theorie umgeändert werden zu

$$P(-r\hat{i}^a_j < \hat{i}^a_j - i^a_j < r\hat{i}^a_j) = 1 - \alpha. \quad (4.18)$$

Setzt man nun die Formel (4.14) in die Letztere ein und erweitert mit $\frac{1}{\sqrt{V\left[\frac{a_j^X}{E_j^X}\right]}}$, so ergibt sich

$$P\left(-\frac{r\frac{a_j^X}{E_j^X}}{\sqrt{V\left[\frac{a_j^X}{E_j^X}\right]}} < \frac{\frac{a_j^X}{E_j^X} - \frac{A_j^X}{E_j^X}}{\sqrt{V\left[\frac{a_j^X}{E_j^X}\right]}} < \frac{r\frac{a_j^X}{E_j^X}}{\sqrt{V\left[\frac{a_j^X}{E_j^X}\right]}}\right) = 1 - \alpha, \quad (4.19)$$

wobei A_j^X die wahre Schadenanzahl multipliziert mit deren Versicherungssummen im Alter j ist. Nun wird \hat{i}^a_j verteilt mit dem Erwartungswert $E\left[\frac{a_j^X}{E_j^X}\right]$ und der Varianz $V\left[\frac{a_j^X}{E_j^X}\right]$ angenommen. Diese Parameter können analog zu der Vorgehensweise aus Abschnitt 4.1 über das kollektive Modell aus Satz 4.1 hergeleitet werden. Hierbei wird der Schadenanzahl a_j eine Poissonverteilung mit dem Parameter λ_j zugrunde gelegt. Somit ergibt sich

$$E\left[\frac{a_j^X}{E_j^X}\right] = \frac{\lambda_j \mu_j}{E_j^X} \quad (4.20)$$

$$V\left[\frac{a_j^X}{E_j^X}\right] = \frac{\lambda_j(\sigma_j^2 + \mu_j^2)}{(E_j^X)^2}. \quad (4.21)$$

Nach der Grundannahme (4.19) gilt nun, dass $\frac{\frac{a_j^X}{E_j^X} - \frac{A_j^X}{E_j^X}}{\sqrt{V\left[\frac{a_j^X}{E_j^X}\right]}}$ als standardnormalverteilt angenommen werden kann. Das bedeutet, es gilt wie bei Formel (4.6)

$$\frac{rE\left[\frac{a_j^X}{E_j^X}\right]}{\sqrt{V\left[\frac{a_j^X}{E_j^X}\right]}} = x_\alpha. \quad (4.22)$$

Setzt man nun die oben hergeleiteten Größen (4.20) und (4.21) in die Formel (4.22) ein, so kann wie im vorherigen Abschnitt, nach λ_j umgestellt werden und man erhält als Ergebnis das Full Credibility Kriterium

$$a_j^F = \lambda_j = \frac{x_\alpha^2}{r^2} \left[1 + \left(\frac{\sigma_j}{\mu_j}\right)^2\right]. \quad (4.23)$$

Analog hierzu kann auch der Credibility-Faktor c_j über Partial-Credibility hergeleitet werden. Nur das man für diesen Fall die Grundannahme

$$P(-r\hat{i}_j^a < c_j\hat{i}_j^a - c_ji_j^a < r\hat{i}_j^a) = 1 - \alpha. \quad (4.24)$$

vorliegen hat. Daraus resultiert der Credibility-Faktor

$$c_j = \sqrt{\frac{a_j}{a_j^F}} \quad (4.25)$$

für die Inzidenzraten i_j^a . Im weiteren Verlauf wird ein Beispiel zum Limited Fluctuation Approach gerechnet. Des Weiteren wird die Anwendung des Limited Fluctuation Verfahren auf Altersbänder diskutiert.

4.2.2 Beispiel

Das im Abschnitt 3 selbst gewählte Beispiel wird an dieser Stelle zur Berechnung der minimalen zu beobachtenden Schadenanzahl a_j^F und des Credibility-Faktors c_j fortgeführt. Gegeben ist hierfür folgende Tabelle:

Alter	20	21	22	23	24	25
Exposure E_j^X	€493.585.634	€602.046.080	€730.700.381	€861.153.571	€960.200.174	€1.040.840.191
Actuals a_j^X	€450.000	€0	€100.000	€90.000	€243.539	€497.041
Actuals a_j	2	0	1	2	2	5
Expecteds e_j^X	€136.229,64	€178.205,64	€230.901,32	€289.347,60	€339.910,86	€387.192,55
Expecteds e_j	1	1	1	2	2	3
i_j^a	0,0911%	0,0000%	0,0137%	0,0105%	0,0254%	0,0477%
i_j^e	0,0276%	0,0296%	0,0316%	0,0336%	0,0354%	0,0372%
i_j^Q	0,0245%	0,0262%	0,0283%	0,0298%	0,0313	0,0329%
$E[X_j]$	126.565,24	150.487,22	161.791.45	166.175,50	165.576,17	163.578,83
$V[X_j]$	15.735.251.800	22.697.795.738	22.165.371.527	22.781.913.716	22.616.156.833	21.673.316.232

Die Inzidenzrate, welche über den „Burning Cost Ansatz“ hergeleitet wurde, wird in der vorherigen Tabelle mit i_j^Q bezeichnet.

Nun wird zunächst die minimale Schadenanzahl der zu beobachtenden Schäden a_j^F benötigt, um gegebenenfalls „Full-Credibility“ auf die beobachteten Daten anzunehmen. Diese Berechnung erfolgt gemäß der Formel (4.23). Hierfür wurden die Strukturparameter $\alpha = 0.1$ und $r = 0.2$ verwendet. Als Resultat erhält man die unteren Schranken a_j^F , d.h. die minimale zu beobachtende Schadenanzahl für Full-Credibility.

Alter	20	21	22	23	24	25
a_j^F	81,19	82,01	75,64	74,75	74,75	74,14

Bei dem Vergleich der Resultate von a_j^F mit den tatsächlichen Schäden a_j ist zu erkennen, dass in keinem Alter „Full-Credibility“ angenommen werden kann. Die Schadenanzahl a_j übersteigt bei weitem nicht die minimale Anzahl von beobachtenden Schäden, die

zur Full Credibility benötigt wird. Aus diesem Grund muss auf die „Partial-Credibility“ ausgewichen werden. In diesem Fall wird nun der Credibility-Faktor $c \in [0, 1]$ gemäß der Formel (4.25) berechnet. Die daraus resultierende Rate über Credibility i_j^c ergibt sich aus der Linearkombination aus Formel (4.15).

Alter	20	21	22	23	24	25
Cred.-Faktor	0,157	0	0,115	0,164	0,164	0,260
i_j^c	0,0376%	0,0296%	0,0295%	0,0298%	0,0338%	0,0399%

Bemerkung 7 Bei den hergeleiteten Raten über Credibility i_j^c ist eine Unregelmäßigkeit bei der Monotonie zu erkennen. Die Raten sollten mit steigendem Alter monoton wachsend sein. Dies kann mit der Anwendung des Glättungsverfahrens nach Whittaker-Henderson realisiert werden. Ist dies geschehen, so entsteht folgende Kurve. (siehe Abbildung 4.1) Diese ist unabhängig von dem Beispiel erstellt wurden. Hierbei sollte aber angemerkt werden, dass man bei zu wenig beobachteten Schäden die kleinen Veränderungen der ungeglätteten Rate i_j^c mit dem Whittaker-Henderson-Verfahren wieder eliminiert.

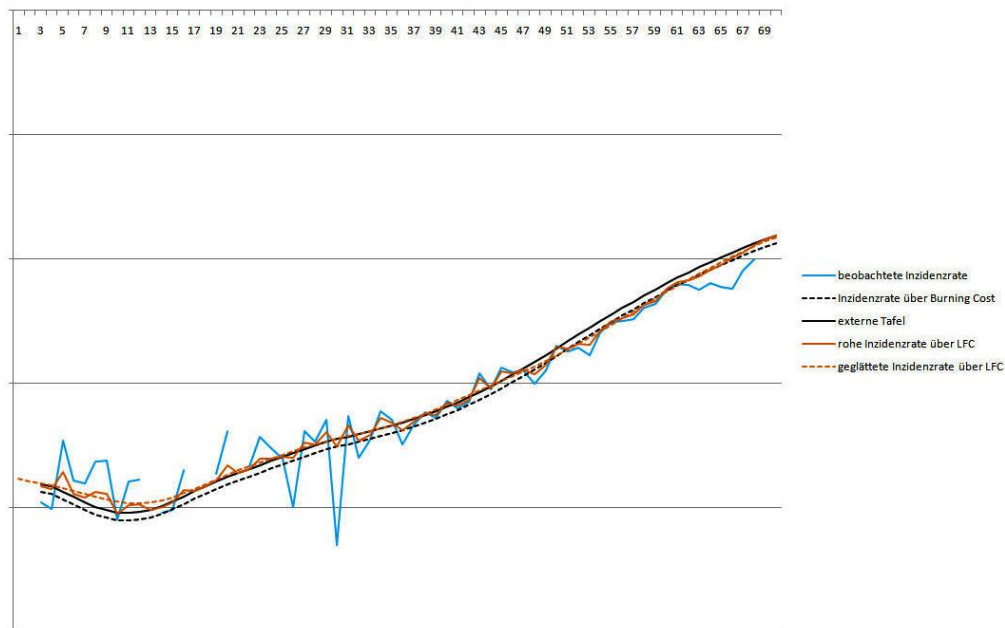


Abbildung 4.1: Glättung der Inzidenzraten und Vergleich

Bei dem Vergleich der geglätteten Inzidenzrate über Credibility-Theorie mit der erwarteten Inzidenzrate lässt sich kaum ein Unterschied feststellen. Der Grund hierfür ist, dass man sehr wenig beobachtete Schäden hat. Ruft man sich die Formel (4.15) nochmal ins Gedächtnis, so wird schnell klar, dass die neue Rate zum größten Teil nur aus der Inzidenzrate der externen Tafel i_j^e bestehen kann. Lediglich in den jungen Jahren sollten

andere Tafeln verwendet werden, da hierfür noch weniger Schadenerfahrungen vorliegen. Dabei kann man beispielsweise auf gegebene Bevölkerungstafeln der DAV bzw. der WHO zurück gegriffen werden.

4.2.3 Limited Fluctuation Credibility und Altersbänder

Bei der Analyse verschiedener Versicherungsbestände wurde zu Beginn klar, dass die Größe des Exposures E_j im Alter j keinen bedeutenden Einfluss auf die Größe der Credibility-Faktoren hat. Betrachtet man die Formeln (4.25) und (4.23) genauer, so ist eine starke Abhängigkeit des Credibility-Faktors c_j von der Anzahl der beobachteten Schäden a_j und von der Varianz der erwarteten Schadenhöhe $V[X_{ij}]$ pro Alter j zu erkennen.

Hierfür gilt:

1. **Je größer die Anzahl unserer beobachteten Schäden ist, umso größer ist der Credibility-Faktor.**
2. **Je stärker die erwarteten Schadenhöhen $E[X_{ij}]$ schwanken, umso kleiner werden unsere Credibility-Faktoren.**

Leider muss man aus Anwendersicht sagen, dass die Anzahl der beobachteten Schäden bei manchen Beständen sehr klein ist. Demnach kann nur sehr selten eine hohe Credibility bzw. „Full-Credibility“ auf die Schadenerfahrungen angenommen werden.

Für diesen Fall wäre es ratsam Altersbänder über 5 oder 10 Jahre zu bilden, um größere Credibility-Faktoren zu erhalten. Hierbei ist allerdings die Anwendung der Credibility-Faktoren eine Andere, als in der Theorie aus Abschnitt 4.2.1 auf Einzelalter beschrieben wurde. Versucht man die Credibility-Faktoren der Altersbänder auf die Einzelalter anzuwenden, so wird in den Altern mit niedriger Schadenerfahrung möglicherweise ein zu hohes Vertrauen unterstellt. Die folgende Tabelle illustriert diese Problematik genauer.

Alter	Cred.-Faktor (Einzelalter)	Cred.-Faktor (5er Altersband)	Cred.-Faktor (10er Altersband)
40	0.256	0.517	0.799
41	0.242	0.517	0.799
42	0.182	0.517	0.799
43	0.202	0.517	0.799
44	0.253	0.517	0.799
45	0.308	0.612	0.799
46	0.279	0.612	0.799
47	0.293	0.612	0.799
48	0.217	0.612	0.799
49	0.263	0.612	0.799

Bei diesem naiven Vorgehen, die Credibility-Faktoren aus den Altersbändern auf die Einzelalter nach der Theorie anzuwenden, würde man beispielsweise im Alter 40 mit dem 5er Altersband eine Credibility von 51.7% annehmen. Hierfür wird nochmals die Formel (4.15) ins Gedächtnis gerufen, d.h.

$$i_j^c = \frac{a_j^X}{E_j^X} c_j + (1 - c_j) i_j^e.$$

Das würde bedeuten, dass man die doppelte Credibility auf die Schadenerfahrung in dem Alter 40 annimmt. Im Grunde geben die Credibility-Faktoren von Altersbändern aber nur das Vertrauen in die Schadenerfahrung in diesem Altersband an und nicht das Vertrauen in die Schadenerfahrung der Einzelalter. Sie sind somit für die Anwendung auf die Einzelalter nach diesem Vorgehen ungeeignet und führen zu keinem plausiblen Ergebnis. Ganz extrem zeigt sich der Effekt der Credibility-Faktoren bei diesem naiven Vorgehen, wenn man einen gemeinsamen Credibility-Faktor für alle Alter herleitet. Das heißt, für einen Bestand mit 0- bis 70-Jährigen würde man ein 71er-Altersband anlegen. Für die folgende Grafik lag Full Credibility auf den Gesamtbestand bzw. auf das 71er-Altersband vor.

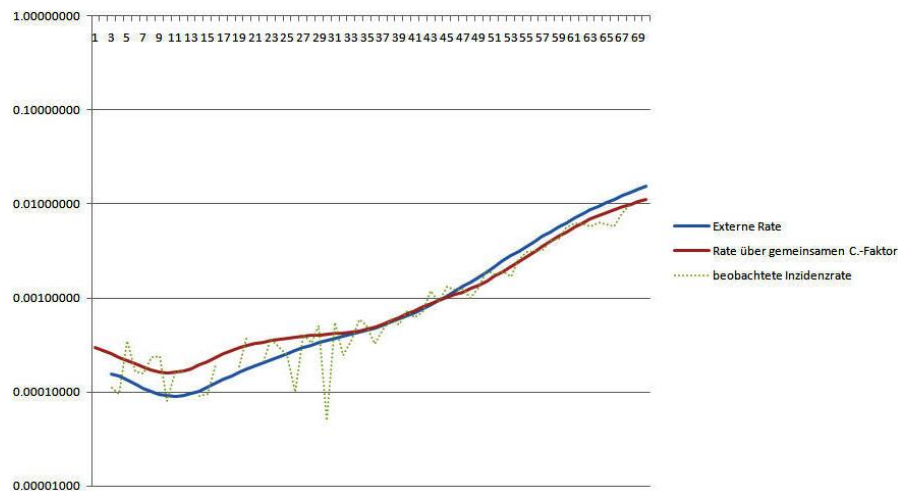


Abbildung 4.2: ein gemeinsamer Credibility-Faktor für alle Alter

Dabei ist in den jungen Jahren zu erkennen, dass die hergeleitete Rate sich erheblich von der externen Rate unterscheidet. Das liegt daran, dass man vollstes Vertrauen auch für Alter mit Schadenanzahl $a_j = 1$ annahm, wie vor allem in den jungen Altern beobachtet wurde. Dies kann bei der Herleitung von Rechnungsgrundlagen problematisch werden, da man möglicherweise zu hohe Preise herleitet. Jedoch nähert sich die hergeleitete Rate

sehr gut an die Beobachtungen in den hohen Altern an.

Es soll mit diesen Sachverhalten nur gezeigt werden, dass die Anwendung von Credibility-Faktoren aus Altersbändern anders behandelt werden sollte als bei Credibility-Faktoren auf Einzelaltern. Die Frage ist nun, welche günstigen Varianten gibt es, um Altersbänder anwenden zu können? Als Antwort auf die Frage wird eine Variante für die Anwendung von Altersbändern vorgestellt. Hierbei gibt es allerdings verschiedene Vorgehensweisen, welche am Ende dieses Abschnittes angesprochen werden.

Wie bereits oben erwähnt, gibt der Credibility-Faktor $c_k^{(5)}$, beispielsweise eines Altersbandes über 5 Jahre, das Vertrauen für die Schadenerfahrung in diesem Altersband an. In diesem Fall gilt, dass $c_k^{(5)}$ der Credibility-Faktor des k -ten 5er-Altersbandes ist. Die Credibility-Faktoren sind nun in jedem Altersband konstant, wie bereits in der obigen Tabelle dargestellt. erinnert man sich an die Interpretation der Credibility-Faktoren für Altersbänder, so muss man im Prinzip eine konstante beobachtete Rate i_k^a für jeden Altersblock k herleiten. Für 5er Altersbänder würden sich die konstanten beobachteten Raten aus dem Quotienten der beobachteten Gesamtschadenhöhe $a_k^{X(Ges\ 5)}$ des k -ten Altersbandes und ihres Gesamtexposure $E_k^{X(Ges\ 5)}$ multipliziert mit deren Versicherungssummen wie folgt ergeben

$$i_k^a = \frac{a_k^{X(Ges\ 5)}}{E_k^{X(Ges\ 5)}} = \frac{a_k^{X(Ges\ 5)}}{\sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} E_{ik}}.$$

Hierbei ist X_{ik} die Versicherungssumme des i -ten Versicherten im Altersband k und E_{ik} sein Exposure. Es ist zu erkennen, dass der Kurvenverlauf dieser beobachteten Rate eine Treppenfunktion darstellt. Für diesen Fall besitzt diese alle 5 Jahre eine Sprungstelle in ihrem Verlauf. Der Nachteil bei dem Verwenden der konstanten beobachteten Raten ist, dass bei Full Credibility ein konstantes Segment in der hergeleiteten Rate über Credibility-Theorie vorhanden ist. Das könnte in diesem Fall zu Fehlern bei der Glättung führen bzw. zu Abweichungen von realen Ratenverläufen. Als Ausweg wählte man aus diesem Grund eine Verschiebung der externen Rate in jedem Altersblock. In diesem Fall ist ein gewisser Monotonie-Verlauf gesichert. Das heißt, die Formel (4.15) wurde für den Fall bei 5er Altersbändern modifiziert zu

$$i_j^c = c_k^{(5)} \frac{a_k^{X(Ges\ 5)}}{e_k^{X(Ges\ 5)}} i_j^e + (1 - c_k^{(5)}) i_j^e, \quad (4.26)$$

wobei $\frac{a_k^{X(Ges\ 5)}}{e_k^{X(Ges\ 5)}}$ der „Actual to Expected Wert“ des k -ten 5er Altersbandes ist und $j \in k$. Die folgende Grafik illustriert diese Verschiebung der externen Rate in jedem 5er Altersblock. Dabei sind die Residuen angegeben, d.h. die Abweichungen der neuen rohen Rate

über 5er Altersbänder und der externen Tafel. Dabei ist zu erkennen, dass vor allem in den jungen und in den höheren Altern eine starke Verschiebung durchgeführt wurde. Je größer diese Altersbänder gewählt werden, desto stärker werden die Verschiebungen durchgeführt. Dieser Effekt liegt zum größten Teil an den größeren Credibility-Faktoren und natürlich auch an den „Actual to Expected Werten“ der einzelnen Altersbänder. In Abbildung 4.4 ist die Verschiebung bei 10er Altersbändern noch besser zu erkennen.

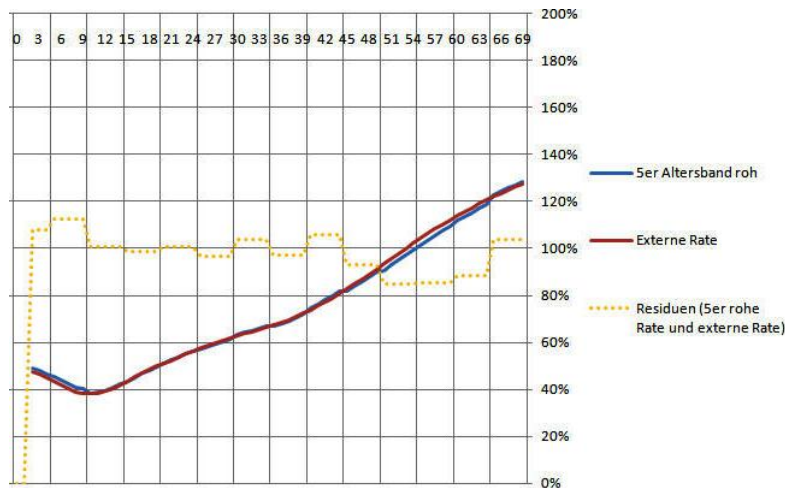


Abbildung 4.3: Anwendung eines 5er Altersbandes

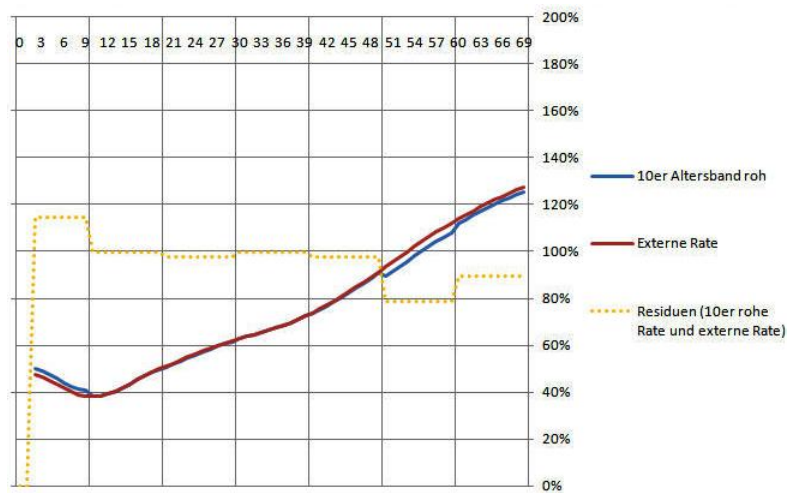


Abbildung 4.4: Anwendung eines 10er Altersbandes

Der Grund, warum die externe Rate in den obigen Darstellungen in den Altern 10 - 49 nicht so stark verschoben wurde, liegt an den „Actual to Expected Werten“, die bei diesen Altersbändern in der Nähe eins lagen. Nun sollte bei diesem Verfahren auf die Glättung

der hergeleiteten rohen Rate eingegangen werden. Wie in der Abbildung 4.3 zusehen ist, besitzt die Kurve der rohen Rate in jedem fünften Alter Sprungstellen. Die Frage ist, wie geht man mit diesen Sprungstellen um? Dabei kommt es immer auf den Verlauf der geglätteten Raten an. Das heißt, wie stark die geglättete Rate von der rohen Rate abweicht. In dem Fall aus Darstellung 4.3 würde das Whittaker-Henderson-Verfahren zu einer akzeptablen Rate führen, wie die folgende Abbildung 4.5 zeigt. Andere Möglichkeiten zur Glättung der Rate wären auch Verfahren zur Interpolation, wie zum Beispiel Polynominterpolation nach Lagrange oder Spline-Interpolation. Das Interpolationspolynom könnte beispielsweise durch die Punkte (x_t, y_t) verlaufen, wobei x_t das mittlere Alter des jeweiligen Altersbandes ist und y_t der dazugehörige Funktionswert von der rohen hergeleiteten Rate.

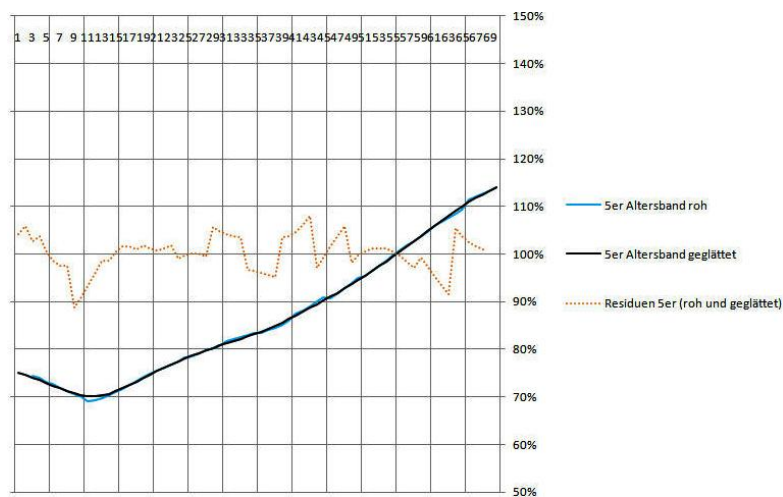


Abbildung 4.5: Glättung einer Rate über 5er Altersbandes

Bemerkung 8 Je nach Verlauf der Kurve kann man das Whittaker-Henderson-Verfahren, Approximationsmethoden oder Interpolationsverfahren wählen.

Anhand dieser Grafik kann nochmal die Glättung über das Whittaker-Henderson-Verfahren akzeptiert werden. Die Abweichungen bzw. die Residuen schwanken fast nie mehr als 15%. Lediglich der Nachteil der geringen Schadenbeobachtung in den jungen Altern könnte vorliegen. Hierfür verwendet man meistens eine andere Tafel für diesen Altersbereich, wie es die DAV bei der Herleitung der Sterbetafel DAV 2008 T gemacht hat. Diese glätteten die Alter 21 - 71 mit dem Whittaker-Henderson-Verfahren und nahmen für die Alter von 0 - 20 eine Bevölkerungstafel. Der Grund für die Verwendung einer Bevölkerungstafel waren zu geringe Schadenerfahrungen in diesem Altersbereich. Für weitere Betrachtungen zu

diesem Thema verweise ich auf die Veröffentlichung der Deutschen Aktuarsvereinigung zur „Herleitung der Sterbetafel DAV 2008 T“.

Analog zu den Altersbändern über 5 Jahre, wie im vorherigen Verlauf vorgestellt, können auch die Altersbänder über 10 Jahre angewendet werden. Für diesen Fall wird lediglich die Darstellung der Residuen zwischen geglätteter und roher Rate über 10er Altersbänder angegeben.

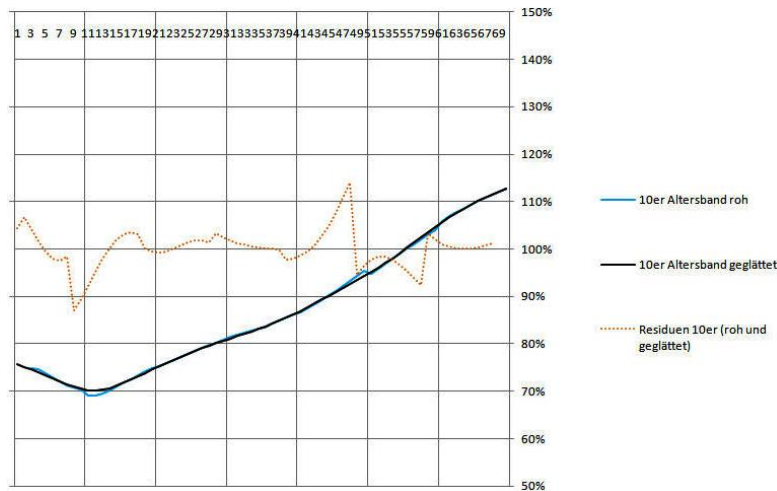


Abbildung 4.6: Glättung einer Rate über 10er Altersbandes

Die Glättung der rohen Rate über 10er Altersbänder ist ebenfalls akzeptabel hinsichtlich der Residuen. Eine noch größere Wahl von Altersbändern sollte nicht getroffen werden, weil in dem Fall die Form der externen Tafel nicht mehr groß geändert wird und außerdem Schwierigkeiten bei der Glättung auftreten könnten. Die Anwendung eines gemeinsamen Credibility-Faktors nach diesem Vorgehen zeigt, dass sich die Form der externen Tafel gar nicht mehr ändert. Hierfür schaut man sich die Formel mit einem gemeinsamen Credibility-Faktor genauer an, d.h.

$$i^c = c \frac{a^{X(Ges)}}{e^{X(Ges)}} i^e + (1 - c) i^e,$$

wobei $\frac{a^{X(Ges)}}{e^{X(Ges)}}$ der „Actual to Expected Wert“ im Sinne von Abschnitt 3 ist. Dabei ist zu erkennen, dass dieses Verfahren für einen gemeinsamen Credibility-Faktor für alle Alter im Prinzip ein „gehemmtes“ Burning Cost Verfahren ist. Gehemmt durch den Credibility-Faktor c . Wird nun Full Credibility auf den Gesamtbestand angenommen, so wird exakt das Burning Cost Verfahren angewendet.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Altersbänder durchaus eine Alternative für ge-

ringe Schadenerfahrungen in den Einzelaltern sind. Dennoch büßt man an Genauigkeit ein bzw. an der Änderung des Ratenverlaufs, je größer man die Altersbänder wählt. Eine Gegenüberstellung der hergeleiteten Raten über Limited Fluctuation mit Einzelaltern, 5er Altersbänder und 10er Altersbänder zeigt die folgende Darstellung. In dieser Grafik ist der immer größer werdende Credibility-Faktor bei wachsenden Altersbändern zu erkennen. Dieser bewirkt, dass die hergeleitete Rate sich nun in den höheren Altern von der externen Tafel wegbewegt und zur beobachteten Inzidenzrate tendiert.

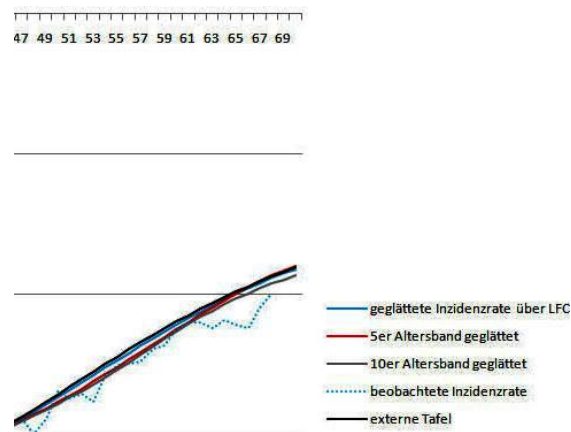


Abbildung 4.7: Vergleich von Raten mit Altersbändern

Hierbei kann nicht angegeben werden, welches der Verfahren das Bessere ist. Aus diesem Grund werden nun nochmal die allgemeinen Punkte bezüglich der Vor- und Nachteile von Altersbändern zusammengefasst.

Vorteile:

- Für Bestände mit geringer Schadenerfahrung können größere Credibility-Faktoren auf die Beobachtungen erreicht werden.
- Die Beobachtungen gehen somit stärker in die hergeleitete Rate ein, da mehr Schäden für die Herleitung der Credibility-Faktoren zur Verfügung stehen.
- Aufgrund größerer Credibility-Faktoren können die Parameter α und r strenger gewählt werden. Das bewirkt zwar wieder eine Verringerung der Credibility-Faktoren, aber man erhält eine sicherere hergeleitete Rate bezüglich der Zufallsschwankungen.

Nachteile:

- Aufgrund der entstandenen Sprungstellen in der hergeleiteten Rate könnte es zu Problemen bei deren Glättung kommen. Dieser Effekt wird umso wahrscheinlicher, je größer man die Altersbänder wählt.
- Somit kann es passieren, dass die geglättete Rate zu sehr von der rohen Rate abweicht. Dabei kann enorm an Genauigkeit verloren werden.
- Man hat bei dem Limited Fluctuation Verfahren mit einem gemeinsamen Credibility-Faktor gesehen, dass sich bei größer werdenden Altersbändern der Ratenverlauf der externen Rate weniger verändert.

4.3 Beurteilung des Limited Fluctuation Approach

Der Limited Fluctuation Ansatz hat den wesentlichen Vorteil, dass er sehr leicht anwendbar ist. Außerdem werden keine Kenntnisse in Bezug auf Schadenhöhenverteilungen vorausgesetzt. Sein Vorteil gegenüber dem Burning Cost Verfahren liegt in der Fähigkeit die Form der externen Tafel zu ändern. Wo Burning Cost die externe Tafel nur verschiebt, kann Limited Fluctuation die Tafel in jedem Alter unabhängig ändern, je nach Schadenerfahrung.

Nachteile bei diesem Ansatz bestehen in der Wahl der Strukturparameter α und r . In der Literatur findet man keine Angaben über eine günstige Wahl bzw. eine Regel zur Wahl dieser Parameter. Sie können praktisch willkürlich festgelegt werden. Dies führt dazu, dass die Ergebnisse auch stark von der Risikoaversion des Versicherers abhängen. Lediglich Herzog [2] gibt eine Tabelle an, in der für verschiedene Parameter die notwendige Schadenerfahrung für Full Credibility zusammengefasst wird.

Wkt.-niveau $1 - \alpha$	Spannweitenparameter r				
	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01
0.900	30	68	271	1082	27,060
0.950	43	96	384	1537	38,416
0.990	74	166	664	2654	66,358
0.999	120	271	1083	4331	108,274

In dieser Tabelle befinden sind allerdings nur die Werte, welche sich aus dem Term $\frac{x_\alpha^2}{r^2}$ der Formel (4.9) ergeben. In dem hier verwendeten Full Credibility Kriterium muss der Term $\frac{(x_\alpha \sigma)^2}{(r\mu)^2}$ jedoch dazu addiert werden. Dieser kann je nach Schadenerfahrung variieren.

Die Schätzung des Credibility-Faktors basiert ausschließlich auf den eigenen Schadenerfahrungen. Das bedeutet, dass die externe Tafel keinen Einfluss auf den Credibility-Faktor hat und auch nicht dafür betrachtet wird. Diese gehen nur am Ende über das Gewicht $(1 - c_j)$ in die hergeleitete Inzidenzrate i_j^c ein. Man beobachtet also nur die eigenen Daten und somit auch eigenen Fehler, aber nicht die Daten von externen Quellen. Wenn die externe Tafel falsch ist, so ist das Limited Fluctuation Verfahren bei einer geringen Schadenerfahrung machtlos. Es würde ohne Zweifel diese falsche externe Tafel annehmen. Dieser Nachteil ist in der folgenden Marktsimulation deutlich zu sehen.

Klugman formuliert in der Literatur [3] den Sachverhalt des Limited Fluctuation Ansatzes mit den Worten:

„Die korrekte Vertrauensfrage sollte sein: 'Wie viel mehr zuverlässig ist i_j^a im Vergleich zu i_j^e ?' und nicht 'Wie zuverlässig ist i_j^a ?'“

5 Marktsimulation

5.1 Einleitung

In den vorherigen Kapiteln wurden verschiedene Verfahren vorgestellt, um die eigenen Schadenerfahrungen in eine gegebene externe Tafel einzubringen bzw. die externe Tafel auf die eigenen Schadenerfahrungen anzupassen. Hierfür betrachtete man das Burning Cost Verfahren, welches die externe Tafel anhand des „Actual to Expected Wertes“ parallelverschiebt. Ebenfalls wurde das Limited Fluctuation Verfahren vorgestellt, welches die beobachteten Inzidenzraten über eine Linearkombination mit gegebenen externen Raten verknüpfte. In dieser Marktsimulation wird außerdem das Limited Fluctuation Verfahren mit einem gemeinsamen Credibility-Faktor für alle Alter betrachtet. Die Herleitung von Eintrittswahrscheinlichkeiten aus Abschnitt 2 stellen Verfahren zur Verfügung, um sogenannte externe Tafeln zu erstellen bzw. Eintrittswahrscheinlichkeiten zu schätzen.

Nun soll mittels einer Marktsimulation in dem Programm EXCEL das Verhalten der Verfahren in verschiedenen Marktsituationen geprüft werden. Das heißt, man betrachtet einen Markt auf dem weniger Schadenerfahrung als erwartet, mehr Schadenerfahrungen als erwartet oder ungefähr soviel Schadenerfahrungen wie erwartet vorliegen. Dabei wird aber stets die gleiche externe Tafel verwendet. Anhand dieser Marktsimulation können Aussagen über die Anwendung bzw. Qualität der Verfahren in bestimmten Schadenerfahrungs-Szenarien gemacht werden, auch wenn die externe Tafel für manche Marktsituationen nicht korrekt ist. Hierfür werden in jedem Szenario jeweils zwei Unternehmen verglichen, die ihre Preise auf der Basis der gegebenen Schadenerfahrungen aus dem Vorjahr über die oben genannten Verfahren festlegen. Das genaue Vorgehen für diese Marktsimulation wird ausführlich in dem folgenden Abschnitt 5.2 beschrieben. Die Ergebnisse bzw. die Auswertungen der jeweiligen Vergleiche in den unterschiedlichen Szenarien werden in den nachfolgenden Abschnitten präsentiert.

5.2 Das Vorgehen

In diesem Abschnitt soll das prinzipielle Vorgehen für diese Marktsimulation detailliert beschrieben werden. Zunächst werden die vier zu vergleichenden Unternehmen vorgestellt. Es wird in dieser Marktsimulation davon ausgegangen, dass man sich vier Unternehmen vorstellt, die ihre Preise über die oben genannten Verfahren festlegen. Das heißt, es werden die folgenden Unternehmen betrachtet:

- Unternehmen A mit dem Burning Cost Verfahren
- Unternehmen B mit dem einfachen Limited Fluctuation Verfahren
- Unternehmen C mit dem Limited Fluctuation Verfahren mit einem gemeinsamen Credibility Faktor für alle Alter
- Unternehmen D mit einer externen Tafel (des Weiteren auch als apodiktisch bezeichnet)

Bemerkung 9 *Für den weiteren Verlauf werden die betrachteten Unternehmen mit der jeweils angewendeten Methode bezeichnet.*

Der Unterschied zwischen dem Unternehmen D und allen anderen Unternehmen liegt darin, dass Unternehmen D in jedem Szenario die gleiche externe Tafel verwendet. Aus diesem Grund wird das Unternehmen D als apodiktisch bzw. unbelehrbar bezeichnet, da es dem Unternehmen prinzipiell egal ist, welche Schadenerfahrungen vorliegen.

Wie oben bereits erwähnt, werden nun drei verschiedene Schadenerfahrungs-Szenarien durchgeführt.

- „Szenario mit erwarteter Schadenerfahrung“: gewählte Gottesrate liegt bei der externen Tafel
- „Szenario mit niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“: gewählte Gottesrate liegt unterhalb der externen Tafel
- „Szenario mit höherer Schadenerfahrung als erwartet“: gewählte Gottesrate liegt oberhalb der externen Tafel

Das bedeutet, es werden drei verschiedene Gottesraten i^G erstellt, um mit ihnen die tatsächlich eintretenden Schäden für jedes Versicherungsjahr zufällig zu generieren. Für das

Erstellen der Gottesrate in dem „Szenario mit erwarteter Schadenerfahrung“, hielt man sich an bekannte Ratenverläufe aus vergangenen Studien. Für die Herleitung der Gottesrate in den „Szenarien mit höherer Schadenerfahrung bzw. niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“ wurde die Gottesrate für das „Szenario mit erwarteter Schadenerfahrung“ um 50% erhöht bzw. gesenkt.

Um nun möglichst zufällige Schäden für jedes Schadenerfahrungs-Szenario zu generieren, erzeugte man poissonverteilte Schadenanzahlen mit dem Parameter $E_j i_j^G$ und die dazugehörigen Versicherungssummen. Dies konnte über eine implementierte EXCEL-Funktion aus dem Zusatzprogramm „@Risk 5.0 for EXCEL“ realisiert werden. Die dabei generierten beobachteten Inzidenzraten im Vergleich zur dazugehörigen Gottesrate für jedes Szenario werden in der folgenden Grafik dargestellt.

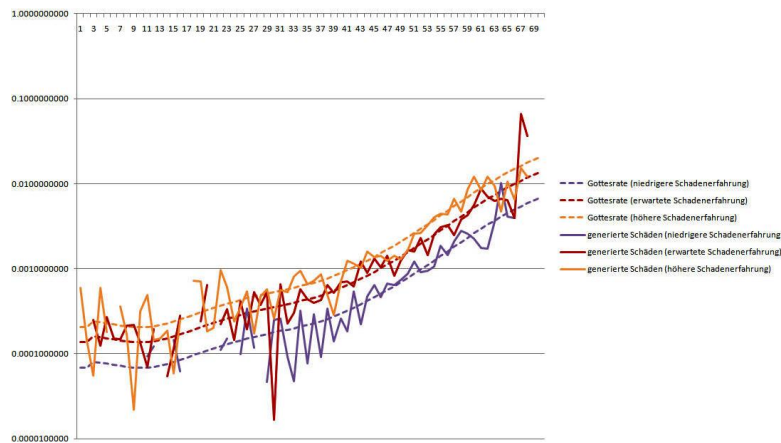


Abbildung 5.1: zufällige Schadenerfahrung für drei Szenarien

In dieser Grafik sind nun die simulierten Schadenerfahrungen bzw. Inzidenzraten für alle drei Szenarien dargestellt, d.h. eine zufällige Generierung von beobachteten Schäden. Dabei ist zu sehen, wie die generierten Beobachtungsraten zufällig um die dazugehörige Gottesrate streuen. Hierfür gilt, je größer das Exposure pro Alter ist, umso mehr nähern sich die zufälligen Raten an die jeweilige Gottesrate an.

Zu Beginn der Marktsimulation wurde einmal für alle drei Szenarien eine Schadenbeobachtung nach dem oben beschriebenen Prinzip generiert, d.h. nur einmal für alle Szenarien wurden Schäden zufällig ausgewürfelt. Für den weiteren Verlauf wird der Prozess der Marktsimulation nur für ein Szenario beschrieben, da der Vorgang für die anderen Szenarien analog hierzu verläuft. Die dabei entstandene Schadenanzahl mit den dazugehörigen Versicherungssummen wurde als Schadenerfahrung aus dem vorherigen Versicherungs-

jahr für alle vier Unternehmen verwendet. Damit ermöglichte man es allen Unternehmen ihre Rechnungsgrundlagen auf der gleichen Datenbeobachtung anzupassen. Es war somit ein besserer Vergleich der verschiedenen Verfahren gegeben, als wenn jedes Unternehmen unterschiedliche Beobachtungen zur Verfügung hätte.

Nach dem nun jedes der oben genannten Unternehmen ihre Preise mit der entsprechenden Methode festgelegt hat, wird nun das vorhandene Exposure auf die jeweiligen zu vergleichenden Unternehmen aufgeteilt. Es wird nochmal darauf hingewiesen, dass für jedes Szenario zwei Unternehmen verglichen werden, d.h. auf dem Markt würden nur zwei Unternehmen existieren, für die sich die Kunden entscheiden müssen. Diese eben angesprochene Exposureaufteilung erfolgt nicht gleichmäßig, sondern hängt von der Preissensitivität ab. Damit sollte bei der Simulation möglichst ein preisorientierter Markt dargestellt werden. Als Preissensitivitätsfunktion wurde eine Normalverteilungsfunktion mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 0.00015$ verwendet. Die folgende Darstellung illustriert den Verlauf einer solchen Preissensitivitätsfunktion. In diesem Fall gibt die x -Achse die absolute Preisdifferenz an und die y -Achse den prozentualen Anteil des Exposures für ein Unternehmen.

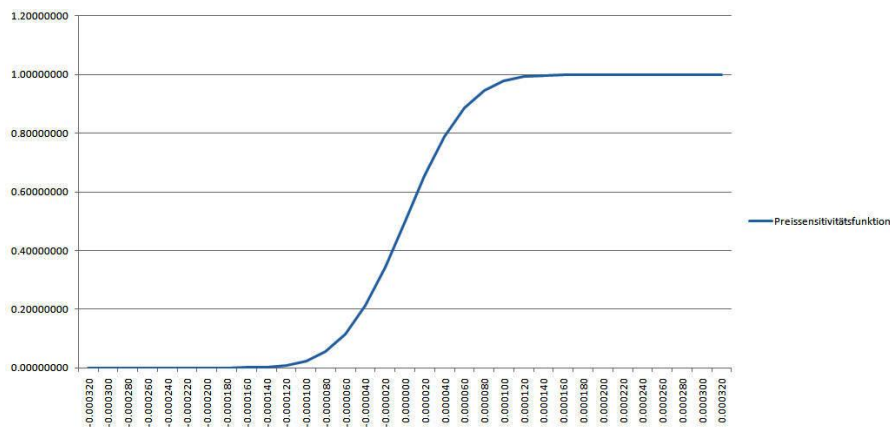


Abbildung 5.2: Preissensitivitätsfunktion

Mit der Anwendung der Preissensitivität sollte gesichert werden, dass Unternehmen mit zu hohen Preisen weniger Kunden bekommen als Unternehmen mit niedrigeren Preisen. Hierbei wurde die absolute Preisdifferenz betrachtet. Schaut man sich den Verlauf der Kurve in Abbildung 5.2 genauer an, so ist bei gleichen Preisen beider Unternehmen eine gleichmäßige Aufteilung des Exposures zu erkennen. Leitet jedoch ein Unternehmen Raten her, die im absoluten Betrag 0.00012 höher sind als die Raten von dem anderen

Unternehmen, so bekommt dieses Unternehmen fast keine Kunden mehr. Diese Preissensitivitätsfunktion kann willkürlich gewählt werden. Für diese Simulation wird sie recht steil gewählt, um einen klaren Vorteil für billigere Unternehmen im Wettbewerb zu gewährleisten.

Bemerkung 10 *Eine andere Variante wäre die Preissensitivitätsfunktion nicht auf die absoluten Preisdifferenzen zu legen, sondern auf die relativen Preisdifferenzen. Dabei hätte man dann Nebeneffekt, dass bei hohen Preisen die Preisdifferenz nicht mehr so hohe Auswirkungen auf die Exposureverteilung hat. Man simuliert also eine gewisse Gleichgültigkeit für die Unternehmensauswahl der Kunden bei hohen Preisen.*

Nun ist die Grundlage für die Simulation gelegt. Die Unternehmen haben die Preise für das Szenario mit der entsprechenden Methode festgelegt und die Kunden haben ihre Unternehmen gewählt. In dem nächsten Schritt erfolgt die eigentliche Simulation. Es werden nun 1000 Iterationen durchgeführt, in denen man die Schadenanzahl und deren Versicherungssummen immer neu generiert. Dabei werden in jedem Iterationsschritt und für jedes Unternehmen die Ausgaben, d.h. die Gesamtschadenhöhe a^X , und die Einnahmen gespeichert. Die Einnahmen berechnet man aus dem Produkt der hergeleiteten Rate i und dem Gesamtexposure E^X multipliziert mit den Versicherungssummen, d.h. beispielsweise für Unternehmen A

$$\text{Einnahmen}(A) \text{ im Alter } j = (E_j^X)^{(A)} i_j^{(A)} = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} E_{ij} i_j^{(A)}. \quad (5.1)$$

Die Ausgaben werden nach dem Prinzip der Formel (3.2) berechnet. Anhand der 1000 Iterationen konnte nun der mittlere Gewinn beider Unternehmen und deren Standardabweichung angegeben werden, um die Qualität der angewendeten Verfahren hinsichtlich der Fähigkeit der Risikoeinschätzung und Wettbewerbsfähigkeit zu erkennen. Die Intention hinter den 1000 Iterationen liegt darin, zufällig gewürfelte ungünstige Fälle für die generierte Schadenanzahl bzw. den Gesamtschaden auszugleichen. Außerdem konnten auf diese Weise die empirischen Wahrscheinlichkeiten dafür berechnet werden, dass ein Unternehmen Gewinn macht oder ein Unternehmen besser abschließt hinsichtlich der Gewinnhöhe als das Andere. Hierfür zählte man einfach die Anzahl der günstigen Ereignisse und dividierte diese durch die Iterationsanzahl. Die wesentlichen Schritte in dem Simulationsverlauf werden nun nochmal zusammengefasst.

Prozessablauf

1. Szenario mit dazugehöriger Gottesrate festlegen
2. zufällige Schadenerfahrung für das Vorjahr mit der jeweiligen Gottesrate generieren
3. Festlegen der Preise über entsprechende Methode bezüglich der vorjährigen Beobachtung
4. Exposureverteilung je nach Preissensitivität festlegen
5. 1000 Iterationen durchführen:
 - a) Einnahmen der Unternehmen in jedem Iterationsschritt speichern
 - b) Ausgaben der Unternehmen in jedem Iterationsschritt neu generieren
 - c) Gewinn bzw. Verlust in jedem Iterationsschritt speichern
6. Auswertung:
 - a) mittlerer Gewinn
 - b) Standardabweichung des Gewinns
 - c) empirische Wahrscheinlichkeiten

5.3 Vergleiche im „Szenario mit niedrigerer Schadenbeobachtung als erwartet“

5.3.1 Vergleich Burning Cost und einfache Limited Fluctuation Credibility

In diesem Abschnitt werden nun die beiden Unternehmen Burning Cost und das einfache Limited Fluctuation Verfahren (ohne Altersbänder) in dem „Szenario mit niedriger Schadenerfahrung als erwartet“ miteinander verglichen. Man stelle sich also einen Markt vor, auf dem nur diese zwei Unternehmen existieren und die ihre Preise bezüglich der vorjährigen Schadenerfahrung mit den oben genannten Methoden festlegen.

Betrachtet man zuerst die hergeleiteten Raten bzw. Preise beider Unternehmen, so wird ziemlich deutlich, welches der Unternehmen das Billigere ist. Die folgende Grafik illustriert den Ratenverlauf beider Unternehmen. Burning Cost senkte seine Preise bezüglich des beobachteten „Actual to Expected Werts“ um knapp 58%, ausgehend von der gleichen externen Tafel, wie Limited Fluctuation ebenfalls verwendete.

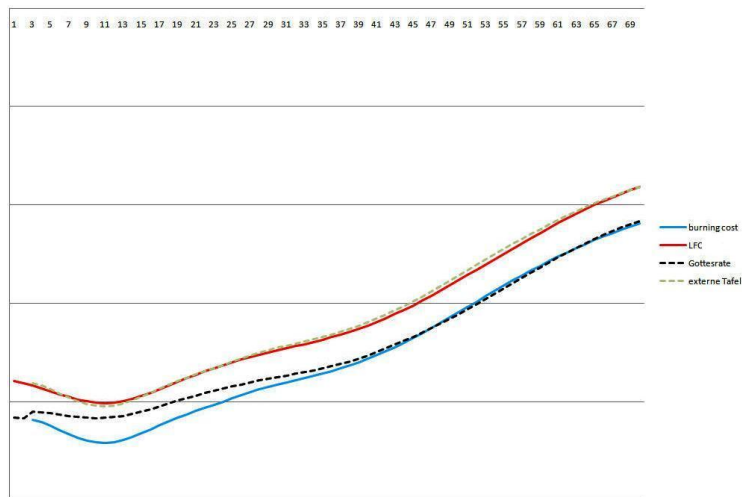


Abbildung 5.3: Ratenverlauf Burning Cost und Limited Fluctuation Credibility

Es ist zu erkennen, dass Limited Fluctuation deutlich teurer ist als Burning Cost. Der Grund hierfür ist die für dieses Szenario verwendete „falsche“ externe Tafel. In diesem Vergleich wird der Nachteil des Limited Fluctuation Verfahrens deutlich, der schon in Abschnitt 4.3 angesprochen wurde. Da die Credibility-Faktoren des Limited Fluctuation Verfahrens nur auf den eigenen Schadenerfahrungen basieren und diese in diesem Szenario relative gering sind, bezieht sich das Limited Fluctuation Verfahren blind auf die „falsche“ externe Tafel. Aus diesem Grund leitet Limited Fluctuation viel zu teure Preise her und wird im schlimmsten Fall wettbewerbsunfähig.

Aufgrund dieses enormen Preisunterschiedes ist natürlich die Exposureverteilung klar zu Gunsten des Unternehmens mit Burning Cost. Der durchschnittliche Exposureanteil beider Unternehmen liegt für Burning Cost bei 66.78% und für Limited Fluctuation bei 33.22%. Nach den 1000 durchgeführten Iterationen ergeben sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten und mittleren Gewinne.

	burning cost	LFC		
Exposure-Anteil:	66.78%	33.22%		
Erwartungswert (Gewinn):	-201.466,44 €	8.357.104,80 €		
Standardabw. (Gewinn):	2.258.080,76 €	1.241.727,68 €		
Wkt für Gewinn ($P[G>0]$):	46,700%	100,000%		
Wkt für Verlust ($P[G\leq 0]$):	53,300%	0,000%		
Der Gewinn von U. mit burning cost Methode	ist GRÖßER als der Gewinn von U. mit LFC			0,10000%
Der Gewinn von U. mit burning cost Methode	ist KLEINER als der Gewinn von U. mit LFC			99,90000%

Abbildung 5.4: Ergebnisse für Burning Cost und Limited Fluctuation Credibility

Erstaunlich bei der Betrachtung der Gewinne ist, dass Limited Fluctuation trotz klarem

Exposurenachteils so hohe Gewinne erzielt. Hierbei sollte man allerdings berücksichtigen, dass eine andere Wahl der Preissensitivitätsfunktion durchaus noch weniger Kunden für das Unternehmen Limited Fluctuation zulässt. Das bedeutet, dass vermutlich die Preissensitivitätsfunktion in dieser Simulation zu flach gewählt wurde. Limited Fluctuation wird nicht genügend hart für die hohen Preise „bestraft“. Wählt man die Preissensitivitätsfunktion steiler, so würden die hohen Preise nicht mehr ausreichen, um positive Gewinne zu erzielen. Außerdem sollte nochmal darauf hingewiesen werden, dass Limited Fluctuation die für dieses Szenario falsche externe Tafel verwendet.

Burning Cost dagegen senkt die externe Rate zu grob und unterschätzt dadurch das Risiko. Wo Limited Fluctuation sich nicht traut, dort traut sich Burning Cost zu viel. Ein weiterer Grund für das schlechte Abschneiden des Unternehmens Burning Cost ist die Parallelverschiebung der externen Rate. Betrachtet man die hergeleitete Rate von Burning Cost und die gewählte Gottesrate für dieses Szenario genauer, so ist vor allem in den Altern von 0 bis 37 eine klare Unterschätzung des Risikos erfolgt. Das liegt daran, dass Burning Cost nicht den Verlauf der Rate verändert, sondern lediglich eine Parallelverschiebung durchführt. Bei Szenarien, wo die Gottesrate in etwa die Form der externen Tafel hat, war dieses Problem nicht so stark zu erkennen, da hier keine Anpassung des externen Ratenverlaufes an die Beobachtung notwendig ist. Des Weiteren soll in diesem Abschnitt kein endgültiges Ergebnis vorgelegt werden bezüglich welches Verfahren nun besser ist, da noch weitere Vergleiche für dieses Szenario folgen. Hierfür wurden lediglich die Beobachtungen und Interpretationen formuliert. Die zusammengefassten Schlussbemerkungen für alle Vergleiche bezüglich dieses Szenarios befinden sich in dem Abschnitt 5.3.4.

5.3.2 Vergleich Burning Cost und Limited Fluctuation mit gemeinsamen Credibility-Faktor

Es wurde bereits gezeigt, dass das Unternehmen Burning Cost für dieses Szenario in dem ersten Vergleich das Risiko stark unterschätzt. Der Grund war der abweichende Verlauf der Gottesrate im Vergleich zur externen Tafel in den Altern von 0 bis 37. Es wäre nun interessant zu sehen, wie das „gehemmte“ Burning Cost Verfahren bzw. das LFC mit einem gemeinsamen Credibility-Faktor abschneidet. LFC steht hierbei für Limited Fluctuation Credibility. Natürlich kann es genauso wenig wie das Burning Cost Verfahren die

Form der externen Rate verändern, aber es verschiebt die externe Rate nicht so grob. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, ebenfalls ein gewisses Vertrauen auf die beobachtete Gesamtschadenanzahl des Bestandes anzunehmen, welches in die hergeleitete Rate eingeht. In diesem Fall lag dieses Vertrauen bei einem Credibility-Faktor von rund 91%. Aus diesem Grund verschiebt LFC mit einem gemeinsamen Credibility-Faktor die externe Rate nicht ganz so massiv wie Burning Cost, wenn auch nur geringfügig. Das Ergebnis der beiden hergeleiteten Preise ist in folgender Grafik dargestellt. Hierbei ist klar zu erkennen, dass das gehemmte Burning Cost Verfahren die externe Rate weniger verschiebt als es das normale Burning Cost Verfahren macht. Dennoch ist die Preisdifferenz relativ gering in Bezug auf die gewählte Preissensitivitätsfunktion. Daher liegt der Exposureanteil von Burning Cost bei 52.22% und für das Limited Fluctuation mit gemeinsamen C.-Faktor bei 47.78%.

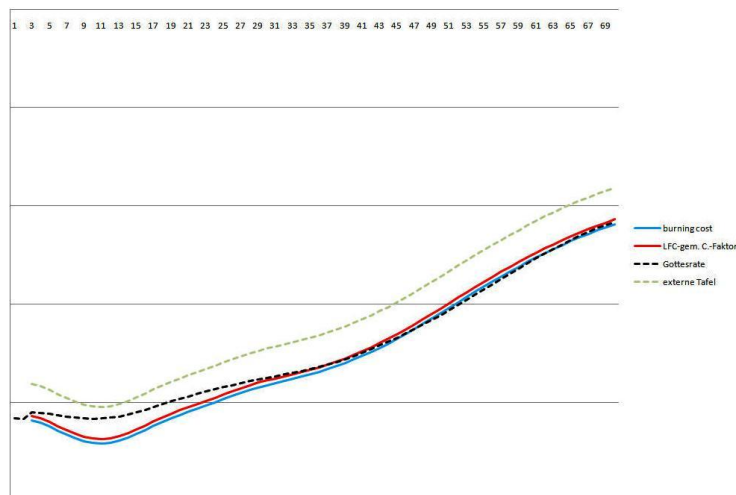


Abbildung 5.5: Ratenverlauf Burning Cost und LFC mit gemeinsamen C.-Faktor

Natürlich leitet das gehemmte Burning Cost Verfahren nun höhere Preise her als das normale Burning Cost Verfahren. Allerdings war in dem vorherigen Abschnitt schon zu erkennen, dass mit den Preisen von dem normalen Burning Cost klar das Risiko unterschätzt wurde. Nach den 1000 Iterationen ergaben sich folgende Resultate.

	burning cost	LFC-gem. C.-Faktor		
Exposure-Anteil:	52,22%	47,78%		
Erwartungswert (Gewinn):	-444.893,90 €	1.680.732,30 €		
Standardabw. (Gewinn):	1.983.346,07 €	1.686.480,29 €		
Wkt für Gewinn (P[G>0]):	43,200%	84,300%		
Wkt für Verlust (P[G≤0]):	56,800%	15,700%		
Der Gewinn von	U. mit burning cost Methode	ist GRÖßER als der Gewinn von	U. mit LFC gemeinsamer C.-Faktor	21,50000%
Der Gewinn von	U. mit burning cost Methode	ist KLEINER als der Gewinn von	U. mit LFC gemeinsamer C.-Faktor	78,50000%

Abbildung 5.6: Ergebnisse für Burning Cost und LFC mit gemeinsamen C.-Faktor

Aufgrund der geringeren Verschiebung der externen Rate durch das LFC mit gemeinsamen C.-Faktor konnten tatsächlich bei diesem Vergleich Preise hergeleitet werden, die das Risiko besser einschätzen konnten als mit dem Burning Cost Verfahren. Wie man in den obigen Wahrscheinlichkeiten ablesen kann, macht nun das Unternehmen mit dem LFC mit gemeinsamen C.-Faktor deutlich öfter Gewinn als noch Burning Cost im vorherigen Vergleich bzw. auch in diesem Vergleich. Außerdem ist die Höhe des Gewinns deutlich größer als die von Burning Cost. Nach den Wahrscheinlichkeiten zu urteilen, ist also das LFC mit gemeinsamen C.-Faktor die bessere Variante, um Preise für dieses Szenario festzulegen. Vorausgesetzt die Gottesrate hat in etwa den Verlauf der externen Rate und unterscheidet sich nicht massiv. Natürlich hängt das Resultat, welches ein Unternehmen in dieser Marktsimulation erzielt, stark von dem anderen Unternehmen ab. Das bedeutet, das Ergebnis von beispielsweise Burning Cost ist ein anderes im Vergleich mit LFC als im Vergleich mit der externen Tafel. Das liegt vor allem an der Exposureverteilung, welche in jedem Vergleich unterschiedlich ist. Dennoch lässt sich sagen, dass das LFC mit gemeinsamen C.-Faktor in dem vorherigen Vergleich mit dem einfachen Limited Fluctuation Verfahren ebenfalls besser abgeschnitten hätte als es Burning Cost tat. Für diesen Vergleich, d.h. LFC mit gemeinsamen C.-Faktor und einfaches Limited Fluctuation Verfahren, wird lediglich die Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten und mittleren Gewinnen angegeben.

	LFC	LFC-gem. C.-Faktor		
Exposure-Anteil:	34,39%	65,61%		
Erwartungswert (Gewinn):	8.948.870,05 €	3.866.492,92 €		
Standardabw. (Gewinn):	1.240.358,69 €	2.256.708,40 €		
Wkt für Gewinn (P[G>0]):	100,000%	95,300%		
Wkt für Verlust (P[G≤0]):	0,000%	4,700%		
Der Gewinn von	U. mit LFC	ist GRÖßER als der Gewinn von	U. mit LFC gemeinsamer C.-Faktor	98,10000%
Der Gewinn von	U. mit LFC	ist KLEINER als der Gewinn von	U. mit LFC gemeinsamer C.-Faktor	1,90000%

Abbildung 5.7: Ergebnisse für einfaches LFC und LFC mit gemeinsamen C.-Faktor

Hierbei sieht man anhand des mittleren Gewinns und der Wahrscheinlichkeit, dass das

Unternehmen mit LFC mit gemeinsamen C.-Faktor deutlich besser abschneidet als es Burning Cost tat. Das liegt wiederum an der geringeren Parallelverschiebung der externen Rate.

5.3.3 Vergleich einfache Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel

Dieser Vergleich der beiden Unternehmen apodiktische Tafel und Limited Fluctuation Credibility soll noch einmal zeigen, dass für das LFC-Verfahren wirklich eine zu geringe Schadenerfahrung in diesem Szenario vorlag, um sich vollständig von der externen Tafel abzuwenden. Ein detaillierter Vergleich beider Unternehmen wäre an dieser Stelle nicht viel Wert, da beide Unternehmen deutlich zu hohe Preise herleiten. Wie bereits in den vorherigen Abschnitten erwähnt, liegt dies an der „falschen“ externen Tafel für dieses Szenario. Deshalb soll für diesen Abschnitt lediglich ein Ratenvergleich erfolgen bzw. der Vergleich der Gewinnwahrscheinlichkeiten beider Unternehmen. Hierfür betrachtet man zunächst die beiden hergeleiteten Raten der Unternehmen in der folgenden Grafik.

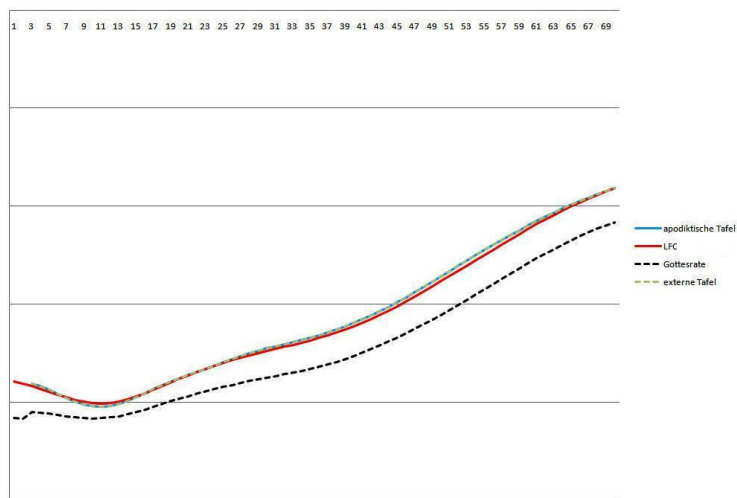


Abbildung 5.8: Ratenverlauf Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel

Die Rate von LFC ist in den jungen Altern von 7 bis 13 etwas oberhalb von der externen Rate. Eine weitere Veränderung ist noch in den höheren Altern zu erkennen. Hierfür sind die Credibility-Faktoren pro Alter groß genug, um die hergeleitete Rate etwas von der falschen externen Tafel wegzuziehen. Dennoch sind die Credibility-Faktoren für eine massivere Verschiebung zu klein gewesen. Folglich ist der Datenbestand für eine korrektere hergeleitete Rate von Limited Fluctuation viel zu klein. Dennoch hat diese geringe Ver-

änderung der hergeleiteten LFC-Rate in Bezug zur externen Tafel große Auswirkungen auf die Gewinnhöhe. Hierfür betrachtet man die folgende Tabelle.

	LFC	apodiktische Tafel		
Exposure-Anteil:	53,87%	46,13%		
Erwartungswert (Gewinn):	30.850.348,66 €	23.079.840,84 €		
Standardabw. (Gewinn):	2.009.704,54 €	1.669.120,61 €		
Wkt für Gewinn ($P[G>0]$):	100,000%	100,000%		
Wkt für Verlust ($P[G\leq 0]$):	0,000%	0,000%		
Der Gewinn von	U. mit LFC	ist GRÖßER als der Gewinn von	U. mit apodiktischer Tafel	99,800000%
Der Gewinn von	U. mit LFC	ist KLEINER als der Gewinn von	U. mit apodiktischer Tafel	0,200000%

Abbildung 5.9: Ergebnisse für Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel

Aufgrund der etwas gesenkten Preise in der höheren Altern bekommt Limited Fluctuation mehr Exposure und hat somit mehr Einnahmen. Ebenfalls die Erhöhung der Preise in den jungen Altern bewirkt ein besseres Abschneiden des Limited Fluctuation im Vergleich zur apodiktischen Tafel. Für dieses Szenario muss man allerdings sagen, dass beide Verfahren enorm hohe Preise herleiten. In der Realität würde sich vermutlich kein Kunde für die Unternehmen entscheiden. Die Simulation lässt den Kunden hierbei keine Wahl. Sie müssen sich für eines der beiden Unternehmen entscheiden.

5.3.4 Zusammenfassung der Beobachtungen für das „Szenario mit niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“

Die Simulation für das „Szenario mit niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“ sollte Aufschlüsse über die Qualität der einzelnen Verfahren in der Extremsituation geben, in der weitaus weniger Schäden beobachtet wurden als erwartet. Bevor eine Zusammenfassung für die vergangenen Vergleiche im „Szenario mit niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“ gegeben wird, sollte zunächst erwähnt werden, dass die Vergleiche „Burning Cost/apodiktische Tafel“ und „Limited Fluctuation mit gemeinsamen C.-Faktor/apodiktische Tafel“ weggelassen wurden. Da die apodiktische Tafel im Vergleich zu Burning Cost viel zu hoch war, man erinnert sich an eine Verschiebung der externen Rate um knapp 58% im Burning Cost Verfahren, waren die wichtigsten Beobachtungen bereits in den anderen Vergleichen gemacht wurden.

Zusammenfassend kann man für die durchgeführten Vergleiche in diesem Schadenerfahrungs-Szenario Folgendes sagen. Das einfache Limited Fluctuation Verfahren verbessert zwar die externe Rate, wie man in dem Vergleich aus Abschnitt 5.3.3 erkennen konnte, aber diese Veränderung ist zu geringfügig für wettbewerbsfähigere Preise. Im schlimmsten Fall

leitet dieses Unternehmen wettbewerbsunfähige Preise her. Für eine massivere Veränderung der für dieses Szenario falschen externen Rate sind einfach zu wenig Schadenerfahrungen vorhanden und somit zu geringe Credibility-Faktoren pro Alter. Es wurden weitere Tests gemacht, um zu sehen ob irgendwann die Schadenerfahrung groß genug ist, um die falsche externe Tafel abzulehnen. Dabei musste man das Exposure bzw. die beobachtete Schadenanzahl um mehr als das 30-fache der verwendeten Anzahlen erhöhen. Erst dann lieferte Limited Fluctuation relativ akzeptable Preise und somit auch einen höheren Kundenzuwachs. Eine andere Möglichkeit die hergeleitete Rate von der falschen externen Tafel wegzuziehen, besteht auch in der Wahl der Parameter. Für diese Resultate wurde stets $\alpha = 0.05$ und $r = 0.1$ gesetzt. Wählt man die Parameter größer, so büßt man zwar an Genauigkeit bzw. Sicherheit der hergeleiteten Rate ein, aber man erhöht die Credibility-Faktoren.

Die sehr hohen Gewinne für dieses Unternehmen in Abschnitt 5.3.1 sollten mit Skepsis betrachtet werden, da diese stark von der Wahl der Preissensitivitätsfunktion abhängen. In der Realität wären diese Preise vermutlich so hoch gewesen, dass sich möglicherweise kein Kunde für dieses Unternehmen entschieden hätte. Abschließend kann man für die Limited Fluctuation Credibility bei unnatürlicher Schadenerfahrung sagen, d.h. wenn die Beobachtungen deutlich unterhalb der zugrunde gelegte externe Rate liegen, dass hierbei ein großes Vertrauen in den eigenen Schadenerfahrung existieren muss, um Limited Fluctuation anwenden zu können. Denn nur bei großem Vertrauen, d.h. einer großen Anzahl beobachteter Schäden, lehnt Limited Fluctuation die falsche externe Rate ab.

Burning Cost hingegen unterschätzte in diesem Szenario das Risiko, wie man in dem Abschnitt 5.3.1 beobachtete. Das lag vor allem an der zu massiven Verschiebung der externen Rate um knapp 58%. Außerdem war in diesem Szenario der Nachteil des Burning Cost Verfahrens zu sehen, dass es nicht die Form der externen Rate an die Beobachtungen anpasst, sondern lediglich eine Parallelverschiebung durchführt. In anderen getesteten Szenarien, in dem die Gottesrate in etwa die Form der externen Rate besaß, schnitt Burning Cost wiederum sehr gut ab. Das bedeutet, wettbewerbsfähige Preise und mit rund 72% Wahrscheinlichkeit einen Gewinn im nächsten Jahr.

Das Limited Fluctuation Verfahren mit einem gemeinsamen C.-Faktor für alle Alter war dagegen eine bessere Variante, wenn man sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten im Zusammenhang zu den Preisen betrachtet. Dieses Verfahren hatte zum Vorteil, dass es nicht ganz so massiv eine Parallelverschiebung der externen Rate vornahm, sondern diese aufgrund von fehlendem Vertrauen in die beobachtete Gesamtschadenanzahl etwas

dämpfte. Damit ging dieses Verfahren nicht ganz so massiv mit den Preisen runter und unterschätzte auch nicht das Risiko, wie in Abschnitt 5.3.2 zu erkennen war. Natürlich ändert dieses Verfahren genauso wenig wie Burning Cost den Verlauf der externen Rate. Der Vorteil hierbei lag in dem Vertrauen zur beobachteten Gesamtschadenanzahl.

Eine Beurteilung für die apodiktische Tafel ist an dieser Stelle nicht geeignet. Dieses Vorgehen ist einfach zu unflexibel für die Szenarien, wo eine untypische Schadenerfahrung gemacht wurde. Aus diesem Grund geht man darauf erst in dem „Szenario mit erwarteter Schadenerfahrung“ ein, weil dabei in etwa soviel Schäden beobachtet werden wie erwartet.

5.4 Vergleiche im „Szenario mit erwarteter Schadenbeobachtung“

5.4.1 Vergleich Burning Cost und einfache Limited Fluctuation Credibility

Nach der Analyse des „Szenarios mit niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“, werden nun die Resultate der Vergleiche im „Szenario mit erwarteter Schadenbeobachtung“ betrachtet. Zu diesem Zweck wird nun der erste Vergleich zwischen Burning Cost Verfahren und Limited Fluctuation Verfahren gezogen. Der Nachteil des Limited Fluctuation Verfahrens im vorherigen Szenario ist nicht mehr vorhanden. Das heißt, es werden nun deutlich mehr Schäden beobachtet, wo die Gottesrate für dieses Szenario in der Nähe der externen Tafel liegt. Diese ist somit nicht mehr falsch, wie im „Szenario mit niedrigerer Schadenerfahrung bzw. später mit höherer Schadenerfahrung als erwartet“. Betrachtet man sich die beiden hergeleiteten Raten der Unternehmen, so ist bei dem Burning Cost Verfahren eine Parallelverschiebung der externen Rate um knapp 10% zu erkennen. Limited Fluctuation dagegen ändert je nach den berechneten Credibility-Faktoren pro Alter die externe Rate. Dabei ergab sich die folgende Darstellung.

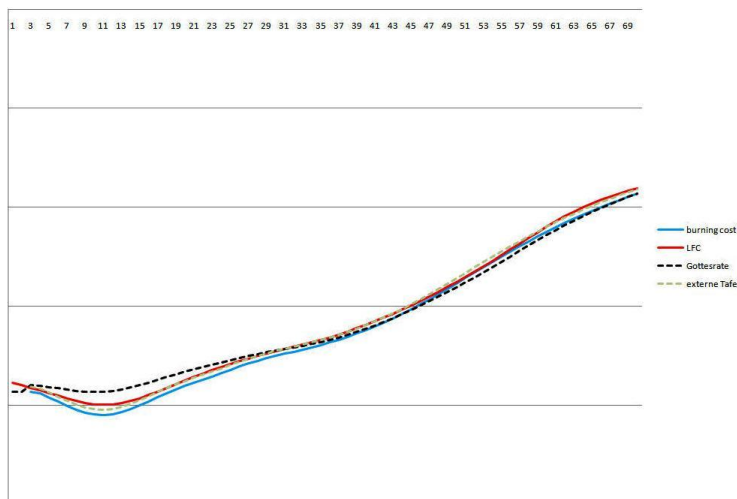


Abbildung 5.10: Ratenverlauf Limited Fluctuation Credibility und Burning Cost

Beide Unternehmen passen die externe Rate sehr fein an die Beobachtungen an. Limited Fluctuation erhöht die Preise in den jungen Altern ab 5 - 17 Jahren und senkt sie durch die höhere Schadenerfahrungen in den Altern 47 - 55, wenn auch nur gering. Demnach zu urteilen, ist die externe Rate für dieses Szenario schon eine sehr gute Rechnungsgrundlage. Andernfalls sind für massivere Veränderungen in der hergeleiteten Rate über Limited Fluctuation einfach zu wenig Schadenerfahrung vorhanden. Das Resultat nach 1000 Iterationen wird in der folgenden Tabelle illustriert.

	burning cost	LFC		
Exposure-Anteil:	53,51%	46,49%		
Erwartungswert (Gewinn):	1.648.216,61 €	3.879.102,97 €		
Standardabw. (Gewinn):	2.816.631,66 €	2.396.984,71 €		
Wkt für Gewinn (P[G>0]):	73,200%	94,000%		
Wkt für Verlust (P[G<=0]):	26,800%	6,000%		
Der Gewinn von	U. mit burning cost Methode	ist GRÖßER als der Gewinn von	U. mit LFC	27,100000%
Der Gewinn von	U. mit burning cost Methode	ist KLEINER als der Gewinn von	U. mit LFC	72,900000%

Abbildung 5.11: Ergebnisse für Limited Fluctuation Credibility und Burning Cost

Aufgrund des Senkens der kompletten externen Rate um 10% ist Burning Cost bei der Höhe der Preise leicht im Vorteil, wenn man sich die Aufteilung des Exposures betrachtet. Burning Cost bekommt 53.51% des Gesamtexposures, wobei Limited Fluctuation nur 46.49% bekommt. Beide Unternehmen machen mit relativ hoher Wahrscheinlichkeit einen Gewinn am Jahresende. Für Limited Fluctuation ist der Gewinn sogar noch höher garantiert als für Burning Cost. Das liegt an den höheren Preisen. Sollte man sich nun für ein Verfahren bei diesem Vergleich entscheiden, so ist für die Wettbewerbsfähigkeit klar

das Burning Cost Verfahren im Vorteil. Dabei geht man allerdings das Risiko ein weniger Gewinn zu machen bzw. man hat eine geringere Wahrscheinlichkeit überhaupt Gewinn zu machen. Um sicher Gewinn zu machen, ist wiederum das Limited Fluctuation Verfahren besser. Diese Beurteilungen sind aber stark abhängig von der Preissensitivitätsfunktion.

5.4.2 Vergleich einfache Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel

Dieser Vergleich zwischen Limited Fluctuation Credibility und apodiktischer Tafel soll zeigen, dass die externe Rate durch das Limited Fluctuation Verfahren doch etwas verbessert wird. Bei der Betrachtung der hergeleiteten Ratenverläufe in diesem Vergleich wird kaum ein Unterschied festgestellt. Lediglich in den jungen Jahren ist ein größerer Unterschied zwischen den beiden Raten zu erkennen. Ansonsten wird die externe Rate in den höheren Altern nur sehr gering verändert.

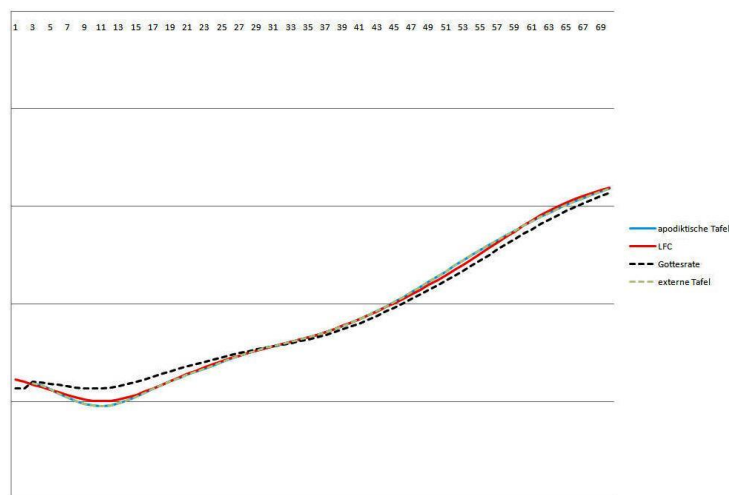


Abbildung 5.12: Ratenverlauf Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel

Erinnert man sich an den Vergleich der Raten aus Abschnitt 5.3.3 im „Szenario mit niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“, so war dort trotz geringerer Schadenerfahrung ein deutlicherer Unterschied in den höheren Altern zu erkennen. Da die externe Rate für dieses Szenario keine falsche Tafel mehr ist, sondern sehr gut auf die Schadenerfahrungen bzw. Gottesrate für dieses Szenario passt, braucht sie nur noch geringfügig an die Beobachtungen angepasst zu werden. Gegen Ende dieses Abschnittes wird der Verlauf der hergeleiteten Raten nochmal für ein Szenario illustriert, in dem ein deutlich größeres Exposure untersucht wurde. Dabei wird eine Anpassung der externen Rate an die

Beobachtungen zu erkennen sein. Entsprechend der jetzigen Datenbasis sind auch die Resultate für diesen Vergleich ausgefallen.

	LFC	apodiktische Tafel		
Exposure-Anteil:	51,40%	48,60%		
Erwartungswert (Gewinn):	5.763.138,36 €	5.951.913,41 €		
Standardabw. (Gewinn):	2.584.251,29 €	2.516.147,76 €		
Wkt für Gewinn ($P[G>0]$):	99,000%	99,100%		
Wkt für Verlust ($P[G\leq 0]$):	1,000%	0,900%		
Der Gewinn von	U. mit LFC	ist GRÖßER als der Gewinn von	U. mit apodiktischer Tafel	48,70000%
Der Gewinn von	U. mit LFC	ist KLEINER als der Gewinn von	U. mit apodiktischer Tafel	51,30000%

Abbildung 5.13: Ergebnisse für Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel

Beide leiten fast identische Preise her, lediglich Limited Fluctuation senkt die externe Rate ein wenig. Aber im groben kann man sagen, haben beide die gleichen Preise und somit auch fast die gleiche Anzahl an Kunden. Für die 1000 Iterationen bekommt man somit auch kein überraschendes Ergebnis heraus. Beide Unternehmen machen mit großer Wahrscheinlichkeit am Ende das Jahres einen Gewinn. Bei den Wahrscheinlichkeiten, welches der beiden Unternehmen nun mehr Gewinn macht, ist ein Unentschieden zu erkennen, da die Preise so nah bei einander liegen.

Somit lässt sich abschließend nur sagen, dass sowohl die apodiktische Tafel als auch das Limited Fluctuation Verfahren sich für dieses Szenario eignen würde.

Wie bereits oben angekündigt wird nun der Verlauf der hergeleiteten Raten für ein deutlich größeres Exposure gezeigt. Das bisher für jeden Vergleich gewählte Exposure wurde für diese Ratenherleitung um das 30-fache erhöht.

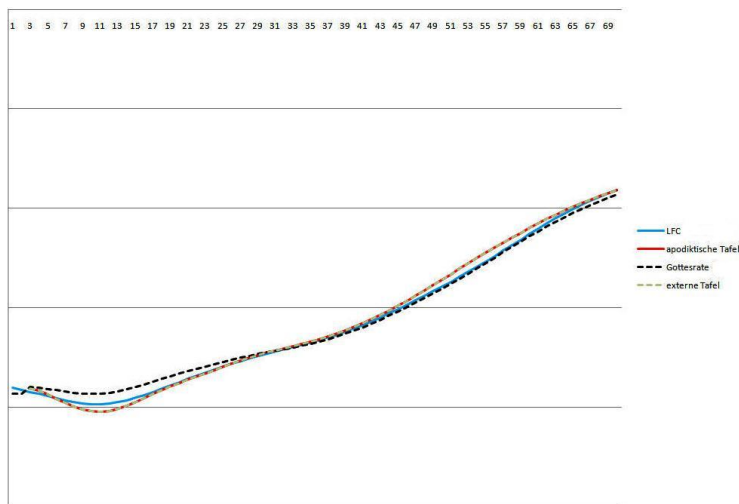


Abbildung 5.14: Ratenverlauf Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel für größeren Bestand

In dieser Grafik sieht man stark, dass die externe Tafel noch stärker korrigiert werden konnte. Natürlich ist sie für dieses Szenario eine relativ gute Tafel und hat somit nicht viel Korrekturen nötig. In dem kleineren Bestand war die Schadenerfahrung zu gering, um massivere Korrekturen über das Limited Fluctuation Verfahren durchzuführen. Doch der Vergleich mit dem größeren Bestand zeigt deutlich, dass bei einer hinreichend großen Daten Menge Limited Fluctuation durchaus gute Anpassungen der bisherigen Rechnungsgrundlagen an die Beobachtungen liefert.

5.4.3 Vergleich apodiktische Tafel und Burning Cost

Dieser Vergleich ist im Grunde derselbe wie schon in Abschnitt 5.4.1, da sich die externe Rate nicht stark von der hergeleiteten Rate über Limited Fluctuation Credibility unterscheidet, wie man in Abschnitt 5.4.2 beobachtet hat. Aus diesem Grund wird hierfür keine detaillierte Diskussion geführt, sondern lediglich die Raten und die Resultate aufgezeigt. Die folgende Darstellung zeigt die hergeleiteten Raten beider Unternehmen. Bei dieser Grafik ist zusehen, dass Burning Cost die externe Rate um 10% senkt. Damit schafft es Burning Cost wettbewerbsfähiger zu bleiben als die apodiktische Tafel.

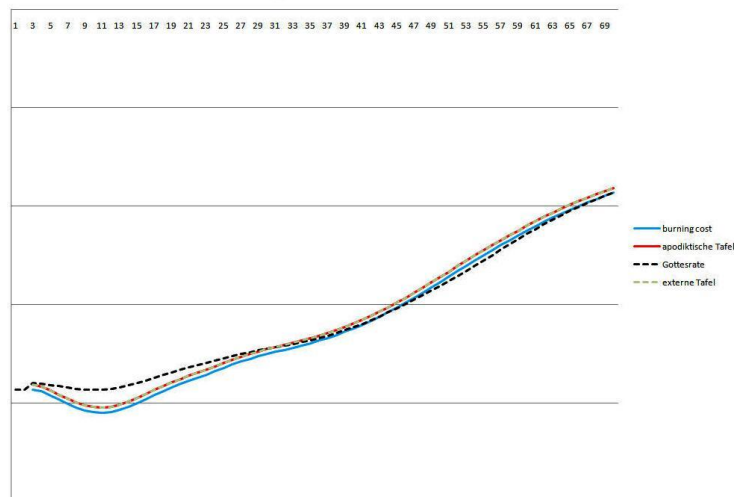


Abbildung 5.15: Ratenverlauf Burning Cost und externe Tafel

Natürlich büßt Burning Cost dadurch an Gewinn ein, aber dennoch gelingt ihnen eine gute Einschätzung des Risikos. Das heißt, sie büßen nicht zu viel Gewinn ein. Die Exposureverteilung ist aus diesem Grund auch deutlich zu Gunsten des Unternehmens mit Burning Cost. Wie die Resultat-Tabelle zeigen wird, machen beide Unternehmen mit hoher Wahrscheinlichkeit am Ende des Jahres einen Gewinn. Die apodiktische Tafel hingegen macht mehr Gewinn als Burning Cost, aufgrund der höheren Preise.

	burning cost	apodiktische Tafel		
Exposure-Anteil:	54,89%	45,11%		
Erwartungswert (Gewinn):	1.949.046,58 €	4.444.060,82 €		
Standardabw. (Gewinn):	2.875.860,69 €	2.315.263,21 €		
Wkt für Gewinn ($P[G>0]$):	75,400%	96,500%		
Wkt für Verlust ($P[G\leq 0]$):	24,600%	3,500%		
Der Gewinn von U. mit burning cost Methode	ist GRÖßER als der Gewinn von U. mit apodiktischer Tafel			24,70000%
Der Gewinn von U. mit burning cost Methode	ist KLEINER als der Gewinn von U. mit apodiktischer Tafel			75,30000%

Abbildung 5.16: Ergebnisse für Burning Cost und externe Tafel

5.4.4 Zusammenfassung der Beobachtungen für das „Szenario mit erwarteter Schadenerfahrung“

Die Betrachtung eines solchen „Schadenerfahrungs-Szenarios mit erwarteter Schadenerfahrung“ sollte Erkenntnisse zur Qualität der Verfahren bei feinen Anpassungen der Rechnungsgrundlagen an die Schadenerfahrungen liefern. Dabei wurde die Gottesrate in der Nähe der externen Rate gewählt. Das Verfahren Limited Fluctuation mit gemeinsamen C.-Faktor für alle Alter wurde in diesem Szenario und auch im nächsten Szenario nicht

betrachtet. Der berechnete Credibility-Faktor für den Gesamtbestand lag in diesen beiden Szenarien bei eins. Das heißt, es konnte Full Credibility auf den Gesamtbestand angenommen werden. erinnert man sich an Abschnitt 4.2.3 in dem unter anderem auf das Limited Fluctuation Verfahren mit einem gemeinsamen Credibility-Faktor für alle Alter eingegangen wurde, so ist die Mutation dieses Verfahrens zum Burning Cost Verfahren bei Full Credibility für den Gesamtbestand bekannt. Dadurch hat man es bei den Vergleichen bei Burning Cost, Limited Fluctuation und apodiktischer Tafel belassen.

Als günstigste Verfahren bezüglich der Gewinnhöhe stellten sich die apodiktische Tafel heraus bzw. das Limited Fluctuation Verfahren. Beide Unternehmen lagen in diesem Szenario relativ gleich. Limited Fluctuation hatte nicht mehr viel zu korrigieren, da die externe Tafel schon eine relativ passende Rate beinhaltete. Lediglich minimale Verbesserungen in der Preisanpassung lagen in Abschnitt 5.4.2 für Limited Fluctuation vor. Dennoch wurde bei einem größeren Datenbestand gezeigt, dass das Limited Fluctuation Verfahren bei einer großen Anzahl von Schadenerfahrungen durchaus bessere Ergebnisse in der Preisbildung liefern kann als anhand des kleineren Datenbestandes gezeigt wurde. Setzt man allerdings den Fokus auf die Wettbewerbsfähigkeit der Preise, so würde das Burning Cost Verfahren am besten abschneiden. Die Korrektur der gesamten externen Rate um 10% nach unten bewirkt zwar eine Verringerung der Gewinnhöhe, dennoch aber keine massive Unterschätzung des Risikos.

Natürlich sollte man nochmal darauf hinweisen, dass die Resultate stark von der Wahl der Gottesrate und der Preissensitivitätsfunktion abhängen. Burning Cost hat in diesem Szenario Glück, da es eine Gottesrate enthält, die in etwa den Verlauf der externen Rate hat. Ist der Ratenverlauf der Gottesrate stark untypisch, wie es bereits in Abschnitt 5.3 erwähnt wurde, so ist Burning Cost machtlos. Für die Festlegungen in dieser Simulation jedoch erzielt Burning Cost bezüglich des Wettbewerbs bzw. der Preise das beste Ergebnis.

5.5 Vergleiche im „Szenario mit höherer Schadenbeobachtung als erwartet“

5.5.1 Vergleich Burning Cost und einfache Limited Fluctuation Credibility

Die Vergleiche zu diesem „Szenario mit höherer Schadenerfahrung als erwartet“ sollen die Verfahren vor die Extremsituation stellen, wenn bei weitem mehr Schäden beobach-

tet werden als erwartet. Dieses Szenario ist für jedes Versicherungsunternehmen eine der unangenehmsten Situationen. Das würde bedeuten, dass die angenommenen Rechnungsgrundlagen das bestehende Risiko stark unterschätzt haben. Nun sollen die Verfahren daraufhin getestet werden, ob es in dieser Situation möglich ist den Fehler in der externen Tafel durch die bekannten Schadenerfahrungen zu korrigieren. Hierfür werden zunächst die beiden Verfahren Burning Cost und Limited Fluctuation Credibility betrachtet. Beide Verfahren haben die gleiche für dieses Szenario falsche externe Tafel zur Verfügung und auch exakt die gleiche Schadenerfahrung aus dem Vorjahr. Bei der Betrachtung der Raten ist eine klare Erhöhung der externen Rate von Burning Cost zu erkennen (um 32%). Limited Fluctuation dagegen ist sehr misstrauisch bezüglich der Beobachtung in den jungen Altern. Für diese sind zu wenig Schäden beobachtet wurden, um eine massivere Erhöhung der Rate zu bewirken. Lediglich in den Altern 51 bis 57 konnte die hergeleitete Rate in die Nähe der angesetzten Gottesrate gebracht werden.

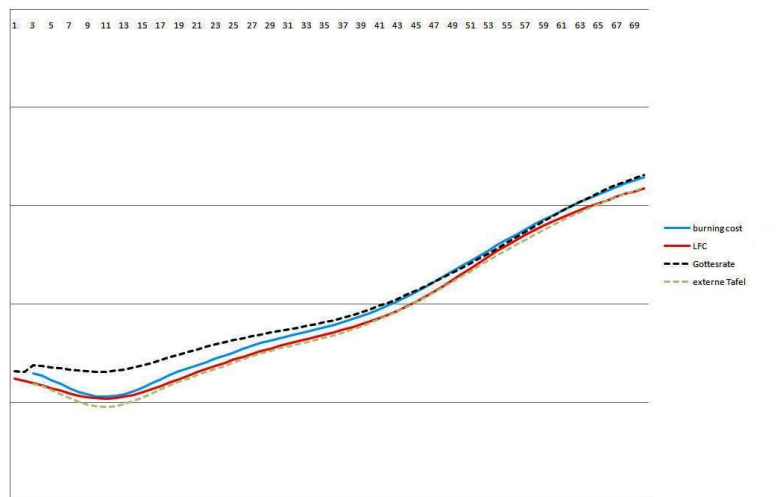


Abbildung 5.17: Ratenverlauf Burning Cost und Limited Fluctuation Credibility

Beide Verfahren haben in diesem Szenario folgende Probleme in der Ratenherleitung. Limited Fluctuation hat einfach zu geringe Schadenerfahrungen für den Gesamtbestand und vor allem für die jungen Alter. Hierbei sollte man überlegen, ob man die Rate in den jungen Jahren nicht doch über Altersbändern berechnen sollte oder gar andere Verfahren in Erwägung ziehen sollte. Burning Cost hingegen hat das Problem der Anpassung des Ratenverlaufes. Es betrachtet in dem Gesamtbestand einen „Actual to Expected Wert“ von 132%. Dieser ist jedoch viel zu gering, wenn man sich die jüngeren Alter anschaut. Aufgrund der Betrachtung des Gesamtbestandes geht die Altersklasse von 0 bis 31 deut-

lich verloren. Burning Cost verschiebt somit die externe Rate zu gering. Nun wird das Resultat nach 1000 Iterationen beider Unternehmen in diesem Szenario vorgestellt.

	burning cost	LFC		
Exposure-Anteil:	41,49%	58,51%		
Erwartungswert (Gewinn):	-2.394.082,46 €	-15.842.124,11 €		
Standardabw.(Gewinn):	2.616.549,86 €	3.822.866,67 €		
Wkt für Gewinn (P[G>0]):	18,500%	0,000%		
Wkt für Verlust (P[G≤0]):	81,500%	100,000%		
Der Gewinn von	U. mit burning cost Methode	ist GRÖßER als der Gewinn von	U. mit LFC	100,00000%
Der Gewinn von	U. mit burning cost Methode	ist KLEINER als der Gewinn von	U. mit LFC	0,00000%

Abbildung 5.18: Ergebnisse für Burning Cost und Limited Fluctuation Credibility

Beide Unternehmen machen aufgrund der oben angesprochenen Probleme in diesem Szenario deutlichen Verlust. Sie unterschätzen klar das bestehende Risiko. Hierbei muss man Burning Cost noch etwas besser beurteilen als Limited Fluctuation. LFC hält ebenfalls stark an der externen Tafel fest, wie in dem „Szenario mit niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“. Diese Erscheinung lässt sich mit der deutlich geringen beobachteten Schadenanzahl erklären. Aus diesem Grund macht Limited Fluctuation fast nie Gewinn am Jahresende. Dagegen Burning Cost erzielt mit der groben Verschiebung der externen Rate wenigstens zu rund 18% einen Gewinn. Auch dieses Resultat ist inakzeptabel, aber zumindest besser als das von Limited Fluctuation. Zur Wettbewerbsfähigkeit lässt sich in diesem Szenario leider nichts sagen. Da die Unternehmen ihre Preise enorm erhöhen müssen, legen alle Unternehmen ihren Fokus auf die Gewinnhöhe. Die Unternehmen, die in diesem Szenario ihre Preise beibehalten, setzen auf den Ausgleich des Verlustes über Kundenzuwachs.

5.5.2 Vergleich einfache Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel

In diesem Abschnitt werden nun die Unternehmen Limited Fluctuation Credibility und apodiktische Tafel miteinander verglichen. Hierbei soll gezeigt werden, dass die externe Tafel über Limited Fluctuation durchaus verbessert wurde, allerdings für dieses Szenario zu gering. Die apodiktische Tafel hält in diesem Szenario an der externen Tafel fest und nimmt keine Korrekturen hinsichtlich der Schadenerfahrung vor. Limited Fluctuation dagegen korrigiert je nach Schadenerfahrung pro Alter. Darauf wurde bereits in Abschnitt 5.4.1 ausführlich eingegangen. Für dieses Szenario ergaben sich somit folgende hergeleitete Raten.

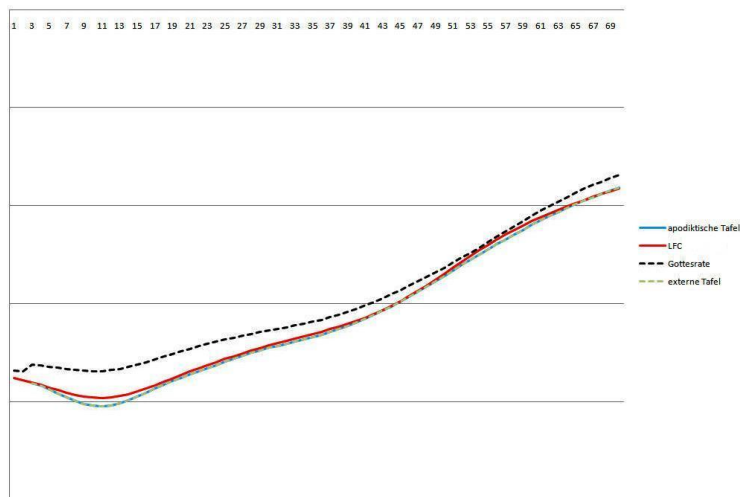


Abbildung 5.19: Ratenverlauf apodiktische Tafel und Limited Fluctuation Credibility

Es ist deutlich zu erkennen, wie Limited Fluctuation versucht hat die Schadenerfahrungen in die externe Tafel einzubinden. Dies ist aber in diesem Schadenerfahrungs-Szenario nicht ganz gelungen. Die beobachtete Anzahl an Schäden war hier einfach zu gering. Selbst für Tests mit einem 30-mal größerem Exposure kam Limited Fluctuation zu keinem akzeptablen Ergebnis. Daraus lässt sich schließen, dass wenn die externe Tafel stark von der Beobachtung abweicht, Limited Fluctuation machtlos ist in der Herleitung von neuen Rechnungsgrundlagen. Man kann auch sagen, Limited Fluctuation ist im allgemeinen sehr schwer von der externen Tafel wegzubekommen. Dafür benötigt man wirklich eine sehr große Menge von beobachteten Schäden. Demnach sind die Resultate in diesem Vergleich klar.

	LFC	apodiktische Tafel		
Exposure-Anteil:	46,94%	53,06%		
Erwartungswert (Gewinn):	-11.057.770,76 €	-18.407.438,88 €		
Standardabw. (Gewinn):	3.022.478,45 €	3.408.270,24 €		
Wkt für Gewinn ($P[G>0]$):	0,000%	0,000%		
Wkt für Verlust ($P[G\leq 0]$):	100,000%	100,000%		
Der Gewinn von	U. mit LFC	ist GRÖßER als der Gewinn von	U. mit apodiktischer Tafel	95,00000%
Der Gewinn von	U. mit LFC	ist KLEINER als der Gewinn von	U. mit apodiktischer Tafel	5,00000%

Abbildung 5.20: Ergebnisse für apodiktische Tafel und Limited Fluctuation Credibility

Beide Verfahren machen enorme Verluste. Limited Fluctuation schafft es durch die geringen Korrekturen diesen etwas zu verringern. Aber dies führt dennoch zu keinem akzeptablen Ergebnis. Beide Verfahren sind für dieses Szenario nicht geeignet. Lediglich Limited Fluctuation hätte noch eine geringe Chance, wenn eine viel größere Menge von

Schadenerfahrungen vorhanden wäre.

5.5.3 Vergleich apodiktische Tafel und Burning Cost

Des Weiteren wird nun der letzte Vergleich in dieser Marktsimulation durchgeführt. Hierbei werden die Unternehmen mit der apodiktischen Tafel und mit dem Burning Cost Verfahren betrachtet. Beide Herleitungen der Preise wurden bereits in den vorangegangenen Abschnitten 5.5.1 und 5.5.2 gründlich diskutiert. In diesem Vergleich stehen sich diese Preise wie folgt gegenüber.

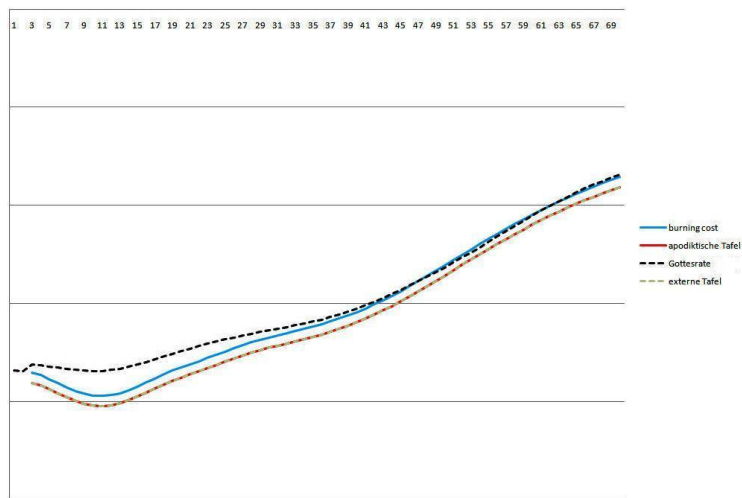


Abbildung 5.21: Ratenverlauf apodiktische Tafel und Burning Cost

In dieser Grafik ist klar zu erkennen, dass Burning Cost versucht das Risiko besser einzuschätzen als es die apodiktische Tafel mit ihrer naiven Methode versucht. Dennoch liegen erneut die Beobachtungen wie schon in Abschnitt 5.5.1 vor. In den Altern von 0 - 31 wird das Risiko für Burning Cost komplett unterschätzt. Die Verschiebung der externen Rate ist für dieses Szenario einfach zu gering.

	burning cost	apodiktische Tafel		
Exposure-Anteil:	39,28%	60,72%		
Erwartungswert (Gewinn):	-2.649.636,38 €	-22.180.420,62 €		
Standardabw. (Gewinn):	2.487.697,37 €	3.776.654,84 €		
Wkt für Gewinn (P[G>0]):	14,400%	0,000%		
Wkt für Verlust (P[G≤0]):	85,600%	100,000%		
Der Gewinn von U. mit burning cost Methode		ist GRÖßER als der Gewinn von U. mit apodiktischer Tafel		100,00000%
Der Gewinn von U. mit burning cost Methode		ist KLEINER als der Gewinn von U. mit apodiktischer Tafel		0,00000%

Abbildung 5.22: Ergebnisse für apodiktische Tafel und Burning Cost

Burning Cost schafft es erneut, zumindest mit einer geringen Wahrscheinlichkeit im Gegensatz zu den anderen beiden Verfahren, einen Gewinn zu erwirtschaften. Dennoch liegt der mittlere Gewinn im negativen Bereich, genauso wie auch bei dem apodiktischen Unternehmen. Burning Cost dämpft diese Verlusthöhe jedoch etwas ein, durch die Parallelverschiebung der externen Rate. In dem folgenden Abschnitt werden nun die interessantesten Beobachtungen und Aspekte nochmal zusammengefasst.

5.5.4 Zusammenfassung der Beobachtungen für das „Szenario mit höherer Schadenerfahrung als erwartet“

Dieses „Schadenerfahrungs-Szenario mit einer höheren Schadenerfahrung als erwartet“ ist zum einen eine gute Sache für die Versicherungsunternehmen, da sie eine Vielzahl von Beobachtungen zur Verfügung haben. Zum anderen ist es eine der unangenehmsten Situationen für die Versicherungsunternehmen, wenn die beobachteten Schadenanzahlen deutlich oberhalb der Erwartungen liegen. In diesem Fall sind die Rechnungsgrundlagen nicht korrekt und unterschätzen deutlich das bestehende Risiko. Genau dieser Fall sollte in diesem Szenario betrachtet werden. Die Unternehmen sollten vor die Herausforderung gestellt werden, ihre bisher falschen Rechnungsgrundlagen anhand der Schadenerfahrungen zu korrigieren. Das Verfahren Limited Fluctuation Credibility mit einem gemeinsamen C.-Faktor wurde hierbei nicht mit betrachtet. Der Credibility-Faktor lag erneut bei eins, wie auch schon bei „Szenario mit erwarteter Schadenbeobachtung“. In diesem Fall mutiert dieses Verfahren zu einem Burning Cost Verfahren.

Das apodiktische Unternehmen mit der unveränderlichen externen Tafel ist in diesem Szenario das Unternehmen mit dem schlechtesten Vorgehen. Hinsichtlich der Wettbewerbsfähigkeit ist es in jedem Vergleich im Vorteil, jedoch hinsichtlich des Gewinns bzw. der Wahrscheinlichkeit überhaupt Gewinn zu machen, ist dieses naive Vorgehen nicht sinnvoll. Aus diesem Grund wird hierbei nicht weiter auf die Betrachtung dieses Verfahrens eingegangen.

Limited Fluctuation hat es in diesem Szenario ebenfalls schwer. Die zu geringe Schadenerfahrung und auch falsche externe Tafel bewirken ein schlechtes Abschneiden in dieser Situation. Dieses Verfahren ist somit gleich in zwei Aspekten klar im Nachteil. Im Falle der falschen externen Tafel muss eine enorme Schadenerfahrung vorliegen, um das Limited Fluctuation Verfahren von der externen Tafel abzubringen. Diese Datenmenge ist jedoch für jedes Alter so hoch, dass sie in der Realität kaum realisiert werden kann.

Ein guter Vorschlag wäre hierbei die hergeleitete Rate in den jungen Jahren mit Altersbändern zu berechnen und in den höheren Altern das normale Limited Fluctuation Verfahren anzuwenden. Dabei sollten die Übergangsstellen allerdings geschickt geglättet werden. Wie schon in Abschnitt 5.4.4 erwähnt, können auch die Parameter α und r großzügiger gewählt werden. Somit bekommt man größere Credibility-Faktoren, allerdings verliert man an Sicherheit in der Herleitung der Rate. Vorschläge zu Wahl der Parameter wurden in Abschnitt 4.3 gemacht.

Burning Cost ist in diesem Szenario das Verfahren, welches von allen am Besten abschneidet, auch wenn selbst dieses Resultat ebenfalls inakzeptabel ist. Das grobe Verschieben der externen Rate hinsichtlich des „Actual to Expected Wertes“ für den Gesamtbestand unterschätzt in den Altern 0 - 31 das Risiko. Diese Unterschätzung hat allerdings solche Auswirkungen, dass ebenfalls ein mittlerer Verlust erzielt wird. Dabei wird nochmal auf den Nachteil angesprochen, dass Burning Cost nicht den Verlauf der externen Rate verändern kann, sondern lediglich eine Parallelverschiebung durchführt. Dennoch schafft es Burning Cost wenigstens zu einer geringen Wahrscheinlichkeit Gewinn zu erwirtschaften, wo die anderen Unternehmen keine Chance haben mit ihren Verfahren.

Als abschließende Bemerkung kann leider kein Verfahren angegeben werden, welches in diesem Szenario die geeignetste Wahl darstellt. Burning Cost kann für kleinere Bestände ganz gute Ergebnisse in diesem Szenario erzielen, hat jedoch den Nachteil durch die Beibehaltung der Form der externen Rate. Limited Fluctuation kann ebenfalls gute Ergebnisse erzielen, wenn erstens die externe Rate korrekt ist und zweitens die Schadenerfahrung hinreichend groß ist. Im Ganzen ist dieses Szenario das Ungünstigste für die Versicherungsunternehmen und somit auch das Schwierigste für die Auswahl der geeigneten Verfahren.

5.6 Zusammenfassung der Marktsimulation

Alle Resultate, die aus der Marktsimulation entstanden sind, müssen unter Vorbehalt betrachtet werden. Beispielsweise die Preissensitivitätsfunktion könnte in der Realität noch steiler verlaufen. Dementsprechend wäre die Verteilung des Exposures auf die einzelnen Unternehmen bei kleineren Preisdifferenzen noch massiver und somit die Einnahmen und Ausgaben noch unterschiedlicher. Außerdem sind die empirischen Verteilungen der Gewinn- bzw. Verlusthöhen der einzelnen Unternehmen stark davon abhängig, wie man die „Gottesraten“ bzw. die wahren beobachteten Schäden erzeugt. Für diese Simulation

hat man sich auf 3 spezielle Gottesraten beschränkt und um diese zufällig poissonverteilte Schäden streuen lassen. Zur Optimierung der Rechenzeit bei dieser Simulation hat man Versicherungssummenbänder gebildet. Damit entstanden zwar Abweichungen in der Genauigkeit der Gewinnhöhen bzw. Credibility-Faktoren, aber es konnte eine Simulation durchgeführt werden.

Es soll damit nur klar gemacht werden, dass die Ergebnisse in der Praxis nicht genauso auftreten müssen. Viele Einflussfaktoren in dieser Simulation wurden nach bestimmten Kriterien gewählt und könnten in der Praxis anders verlaufen.

Die externe Tafel erwies sich dabei als sehr naive bzw. unflexible Variante Preise nach bestimmten Schadenerfahrungen festzulegen. In dem „Szenario mit niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“ waren die Eintrittswahrscheinlichkeiten viel zu hoch angesetzt. Demnach war die externe Tafel für dieses Szenario falsch. Ebenfalls in dem „Szenario mit höherer Schadenerfahrung als erwartet“ war die externe Tafel keine Alternative, da sie das Risiko massiv unterschätzte. Erst in dem „Szenario mit einer erwarteten Schadenerfahrung“, d.h. in der die Eintrittswahrscheinlichkeiten sich nicht stark von der externen Rate unterschieden, führte die externe Tafel zu einem akzeptablen Ergebnis.

Die Limited Fluctuation Methode ist stark davon abhängig wie viel Schäden im Vorjahr der Simulation beobachtet wurden. Wenn die Anzahl dieser beobachteten Schäden zu niedrig ist, dann bezieht sich dieses Verfahren auf die zugrunde liegende externe Tafel. In den „Szenarien mit niedrigerer bzw. höherer Schadenerfahrung als erwartet“ ist dies zu einem erheblichen Nachteil geworden. Für diese Szenarien war die zugrunde liegende Tafel nicht korrekt bzw. wich stark von der Beobachtung ab. Somit geschah es bei einer „niedrigeren Schadenbeobachtung als erwartet“, dass Limited Fluctuation blind auf eine falsche Tafel vertraute. Als Folge dessen entstanden wettbewerbsunfähige Preise bzw. eine massive Unterschätzung des Risikos. Man hat bei Limited Fluctuation nun zwei Möglichkeiten. Entweder, die externe Tafel ist korrekt und die Anzahl der Schäden steht nicht zu sehr im Fokus, oder die externe Tafel ist falsch und man muss mindestens so viele Schäden beobachten, dass man die falsche externe Tafel möglichst ablehnen kann. Der Schluss ist, dass die Limited Fluctuation Methode zur Herleitung von Rechnungsgrundlagen nur für Versicherungen mit hoher Schadenbeobachtung verwendet werden sollte. Das Burning Cost Verfahren dagegen brachte sehr gute Ergebnisse in dem „Szenario mit erwarteter Schadenerfahrung“. Es leitete wettbewerbsfähige Preise her und unterschätzte dabei nicht das Risiko in diesem Szenario. Außerdem schnitt es von allen getesteten Verfahren am besten ab in dem „Szenario mit höherer Schadenerfahrung als erwartet“.

Auch wenn das Ergebnis nicht akzeptabel war, ist es immer noch besser gewesen als die Ergebnisse von den anderen Verfahren. Dennoch war der Nachteil von Burning Cost in manchen Szenarien klar zu sehen, dass es nicht den Verlauf der externen Rate verändern kann, sondern nur eine Parallelverschiebung durchführt. In dem „Szenario mit niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“ konnte kein gutes Ergebnis mit Burning Cost erzielt werden. Dabei war es allerdings möglich mit dem Limited Fluctuation Verfahren mit einem gemeinsamen C.-Faktor für alle Alter ein sehr gutes Ergebnis hinsichtlich der Preisbildung bzw. der Gewinnhöhe zu erreichen. Das lag daran, dass die externe Rate aufgrund des geringen Vertrauens in die Gesamtschadenanzahl nicht so massiv verschoben wurde. Alle Verfahren haben ihre Stärken und Schwächen. Demnach sind manche Verfahren für bestimmte Szenarien nicht geeignet andere wiederum umso mehr. Es wurden mit der Marktsimulation alle Verfahren auf Extremsituationen getestet, die in der Versicherungswirtschaft möglichst nicht eintreffen sollten. Dennoch sind hierbei interessante Ergebnisse beobachtet worden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, Methoden der Credibility-Theorie für die Herleitung von Rechnungsgrundlagen zu untersuchen. Dies war aus verschiedenen Gründen von Interesse. Die bisher bekannten Verfahren für solche Herleitungen von Rechnungsgrundlagen waren Burning Cost bzw. diverse Verfahren zur Schätzung von rohen Erkrankungswahrscheinlichkeiten, die dann über das Whittaker-Henderson-Verfahren geglättet wurden. Hierbei hatte Burning Cost den Nachteil, dass es den Ratenverlauf der externen Tafel nicht verändern konnte, sondern lediglich eine Parallelverschiebung durchführte. Dabei beobachtete man eine gewisse Unflexibilität des Verfahrens für verschiedene Extremszenarien in der Marktsimulation. Ebenfalls die Verfahren zur Herleitung über Initial Exposure bzw. Central Exposure haben einen Nachteil, da sie keine Möglichkeit liefern die beobachteten Inzidenzraten in die externe Tafel einzubringen. Aus diesem Grund war es sinnvoll ein Verfahren aus der Credibility-Theorie zu untersuchen - das Limited Fluctuation Verfahren.

Zunächst stellte man in dieser Arbeit die einzelnen Verfahren vor, die am Ende verglichen wurden. Hierfür wurden im Kapitel 2 verschiedene Verfahren präsentiert, die in der Marktsimulation als apodiktische Tafel bezeichnet wurden. Dabei betrachtete man die Herleitung von rohen Eintrittswahrscheinlichkeiten über Initial Exposure, Central Exposure und der klassischen Methode. Es stellte sich heraus, dass die Herleitung mit Central Exposure durchaus eine der besten Methoden ist und häufig auch in der Praxis genutzt wird.

Die Burning Cost Methode wurde ausführlich in dem Kapitel 3 beschrieben. Dabei illustrierte man die Anwendung dieses Verfahrens anhand eines selbstgewählten Beispiels. Gegen Ende dieses Abschnittes wurde eine Diskussion über die bestehenden Nachteile von Burning Cost geführt. Dabei erwähnte man die Unflexibilität von Burning Cost bei der Änderung des Ratenverlaufs und der groben Verschiebung der externen Raten an-

hand des „Actual to Expected Wertes“.

In Abschnitt 4 stellte man das Credibility-Verfahren Limited Fluctuation vor. Dazu wurden zunächst die allgemeinen Modelle „Full Credibility“ und „Partial Credibility“ beschrieben. Des Weiteren übertrug man dieses Modell auf die Herleitung von Inzidenzraten in Abschnitt 4.2.1 und illustrierte dieses Vorgehen ebenfalls anhand eines selbstgewählten Beispiels. Da bereits hier klar wurde, dass die Anzahl der beobachteten Schäden möglicherweise zu klein sein könnten, wurde in Abschnitt 4.2.3 das Anwenden von Altersbändern betrachtet. Hierbei zeigte man eine Variante die zu ungünstigen Ergebnissen führt und stellte dann eine andere günstigere Variante vor, wie zum Beispiel das Limited Fluctuation Verfahren mit einem gemeinsamen Credibility-Faktor. Dabei wurden mögliche Schwierigkeiten in der Glättung der hergeleiteten Rate erwähnt, die bei der Bildung von Altersbändern entstehen können. Gegen Ende dieses Kapitels diskutierte man bestimmte Nachteile des Verfahrens und gab mehrere Möglichkeiten zur Wahl der Parameter in einer Tabelle bekannt. Für die Herleitung der Preis über Limited Fluctuation wählte man die Parameter sehr streng mit $\alpha = 0.05$ und $r = 0.1$.

In dem letzten Kapitel 5 wurden die einzelnen Verfahren, die in dieser Arbeit vorgestellt wurden, anhand einer Marktsimulation miteinander verglichen. Diese sollte Aufschlüsse zur Beurteilung der Verfahren in drei Extremszenarien geben. Dabei simulierte man die „Szenarien mit einer niedrigeren Schadenerfahrung als erwartet, mit einer höheren Schadenerfahrung als erwartet und einer erwarteten Schadenerfahrung“. Alle Unternehmen hatten dabei die gleichen Beobachtungen und die gleiche externe Tafel zur Verfügung. Einer der größten Nachteile für die Unternehmen war die in den „Szenarien mit niedrigerer und höherer Schadenerfahrung als erwartet“ falschen externen Tafel. Es sollte somit ebenfalls getestet werden, welches der Verfahren bei falschen zugrunde liegenden Rechnungsgrundlagen dennoch gute Preise herleitet, um einen Gewinn zu erwirtschaften. Dabei konnten leider keine positiven Aussagen zum „Szenario mit einer höheren Schadenerfahrung als erwartet“ gemacht werden. Alle Verfahren schnitten hinsichtlich der Gewinnhöhe in diesem Szenario schlecht ab, dabei war Burning Cost noch das beste Verfahren. Die apodiktische externe Tafel war in den „Szenarien mit niedrigerer bzw. höherer Schadenerfahrung als erwartet“ zu unflexibel und leitete wettbewerbsunfähige Preise her bzw. unterschätzte das Risiko. Das Limited Fluctuation Verfahren mit einem gemeinsamen Credibility-Faktor für alle Alter lieferte sehr gute Ergebnisse in dem „Szenario mit niedrigerer Schadenerfahrung als erwartet“. In dem „Szenario mit erwarteter Schadenerfahrung“ leitete Burning Cost die wettbewerbsfähigsten Preise her und Limited

Fluctuation bzw. die apodiktische externe Tafel den höchsten Gewinn. Eine detailliertere Zusammenfassung befindet sich in dem Abschnitt 5.6.

Abschließend kam man bei dem Limited Fluctuation Verfahren zu dem Entschluss, dass dieses Verfahren nur zur Herleitung von Rechnungsgrundlagen für Versicherungen mit einer hohen Schadenerfahrung geeignet ist. Außerdem sollte die externe Tafel in diesem Verfahren möglichst korrekt sein und nicht zu stark von der Schadenbeobachtung abweichen. Das Burning Cost Verfahren bzw. das Limited Fluctuation Verfahren mit einem gemeinsamen Credibility-Faktor eignet sich vor allem für kleinere Bestände, wo stochastische Modelle aufgrund von geringer Datenanzahl versagen. Dabei ist es allerdings davon abhängig wie die Gottesrate verläuft, welche in der Marktsimulation frei gewählt wurde. Des Weiteren wird nun ein Ausblick über weitere Aspekte gegeben, welche ebenfalls Untersuchungen wert sind.

6.2 Ausblick

Ein interessanter Ansatzpunkt wäre eine weitergehende Untersuchung, in welchem Sachverhalt die Verfahren Limited Fluctuation und Burning Cost gleiche Resultate liefern würden. Außerdem wurde oft auf den Nachteil der Unflexibilität des Burning Cost Verfahrens hinsichtlich der externen Rate angesprochen. Interessant wäre zu wissen, wie stark sich die gewählte Gottesrate von der externen Rate unterscheiden darf, damit Burning Cost noch akzeptable Ergebnisse liefert? Außerdem können diese Aspekte auch bezüglich der Portfoliogröße gemacht werden. Das heißt, bei welcher Portfoliogröße Burning Cost anwendbar ist und wann nicht mehr?

Ebenfalls bestand oft der Nachteil, dass das Limited Fluctuation Verfahren machtlos war, wenn eine falsche externe Tafel hinsichtlich der beobachteten Inzidenzraten zugrunde lag. Dafür benötigt Limited Fluctuation eine enorme Schadenerfahrung, um die hergeleitete Rate von der falschen externen Tafel wegzuziehen. Aus diesem Grund wäre es interessant zunächst das Burning Cost Verfahren auf die falsche externe Tafel anzuwenden, um diese grob in die Nähe der beobachteten Inzidenzraten zu bringen. Danach kann das Limited Fluctuation Verfahren für feiner Korrekturen angewendet werden, wenn die jetzige Burning Cost Tafel als externe Tafel verwendet wird. Bei diesem Vorgehen könnte man eventuell die benötigten hohen Schadenerfahrungen bereits mit Burning Cost ausgleichen. Somit wäre eine Untersuchung hinsichtlich einer geschickten Kombination aus Burning Cost und Limited Fluctuation sinnvoll.

Spieltheoretische Betrachtungen könnten ebenfalls Erkenntnisse hinsichtlich von Verfahrensstrategien zu gegebenen Marktsituationen bringen. Dabei müssten mehrere Spiele konstruiert werden, zum einen welches Unternehmen nimmt bei welcher Schadenbeobachtung welches Verfahren und welche Kunden entscheiden sich für welches Unternehmen. Es sollte allerdings der Sachverhalt geklärt sein, dass die Kunden nur bis zu einer bestimmten Preishöhe eine Versicherung auswählen würden. Damit wird der Fall ausgeschlossen, dass die Unternehmen sich absprechen und gleichmäßig die Preise erhöhen und somit unendlichen Gewinn erzielen könnten. Wenn solche Spiele konstruiert sind, könnten diese auf mögliche Lösungskonzepte untersucht werden, wie einem Nash-Gleichgewicht. Für die Einführung in diese Thematik wird an dieser Stelle die Literatur [13] vorgeschlagen.

Wie man sieht, gibt es noch eine Vielzahl von interessanten Aspekten, die weitergehende Untersuchungen wert sind. Jedoch wurde in dieser Arbeit gezeigt, dass das Limited Fluctuation Verfahren durchaus für Versicherungen mit einer hohen Schadenerfahrung geeignet ist, vorausgesetzt die externe Tafel weicht nicht zu sehr von den beobachteten Inzidenzraten ab.

ANHANG

Hauptprogramm zum Limited Fluctuation Ansatz

```
function B = Hp_LFC(A ,C)

disp('Programm zur Berechnung der Credibility-Faktoren über Limited
      Fluctuation Credibility.')
disp('Risikoaversion eingeben!')
p = input('Mit welcher Sicherheit alpha soll gerechnet werden (0 < p < 1):
          ');
r = input('Welche Schwankung r wird in Kauf genommen (0 < r < 1): ');

A = xlsread('lfc_datenbasis','tmp_ExportLFC'); %Exposure Daten

C = xlsread('rates.xls','tmp_IncRates'); % expected Raten (WICHTIG!!! Diese
                                     % müssen in Access geändert werden!!!
                                     % D.h. keine Abfrage männlich
                                     % weiblich in Matlab)

[I,J] = size(A);
[K,L] = size(C);
for i = 1:I
    B(i,1) = A(i,1);
    B(i,2) = A(i,4);
    B(i,3) = A(i,5);
    B(i,4) = A(i,6);
    B(i,5) = A(i,3);
    for k = 1:K
```



```

        if B(i,1) == C(k,2)
            B(i,9) = C(k,3);
        end;
    end;
    B(i,7) = B(i,9)*B(i,2);
    B(i,8) = 1-exp(-B(i,5)/B(i,2));
end;
B = Credibility_Faktor(B, p, r);
B = new_rate(B);
B = burning_cost_rate(B);
scrsz = get(0,'ScreenSize');
f1 = figure('Position',[0 0 scrsz(3) 990]);
data = B;
columnname = {'Alter', 'Exposure','EW' , 'Var' , 'actual' ,
              'FullCredibility','expected' , 'a_rates' , 'e_rates' ,
              'burning_cost_rates' , 'CredibilityFaktor' , 'new_rates'};
columnformat = {'numeric','numeric','numeric','numeric','numeric',
                'numeric','numeric','numeric','numeric','numeric',
                'numeric','numeric'};
t = uitable('Data',data,'ColumnName',columnname,
            'ColumnFormat',columnformat,'Parent',f1,'Position',
            [0 0 scrsz(3)-50 930]);
xlswrite('ResultatTabelle.xls', B, 'Result crude', 'A2:L150')
%grafische Ausgabe der Inzidenzraten
figure('Position',[0 0 scrsz(3) 990])
x = B(:,1);
a_rates = B(:,8);
e_rates = B(:,9);
burning_cost_rates = B(:,10);
new_rates = B(:,12);
semilogy(x, a_rates, '-b')
hold on
semilogy(x, e_rates, '-r')
hold on

```

```

semilogy(x, new_rates, '-k')
hold on
semilogy(x, burning_cost_rates, '-m')
xlabel('Alter')
ylabel('Inzidenzrate')
legend('Rate für actual','Rate für expected','Rate über credibility',
       'rate für burning-cost','Location','EastOutside')
title('Phönix CI-Bestand')
text(3,0.045,['Gender: ' num2str(A(1,2))])
text(3,0.035,['Reason Code Cause: ' num2str(C(1,4))])
text(3,0.027,['p: ' num2str(p)])
text(3,0.0225,['r: ' num2str(r)])
grid on

```

Unterprogramme zum Limited Fluctuation Ansatz

Unterprogramm zur Berechnung der Rate über Credibility i_j^c

```
function B = new_rate(B)

[I,J] = size(B);

for age = 1:I
    B(age,12) = B(age,8)*B(age,11) + (1-B(age,11))*B(age,9);
end;
```

Unterprogramm zur Berechnung der Rate über klassische Methode

```
function B = burning_cost_rate(B)

[I,J] = size(B);
sum_actual = 0;
sum_expected = 0;
for i = 1:I
    sum_actual = sum_actual + B(i,5);
    sum_expected = sum_expected + B(i,7);
end;
Q = sum_actual/sum_expected;
for age = 1:I
    B(age,10) = B(age,9)*Q;
end;
```

Unterprogramm zur Berechnung des Credibility-Faktors c_j

```
function B = Credibility_Faktor(B, p, r)

[I,J] = size(B);

z = norminv((p+1)/2,0,1);

for i=1:I
    B(i,6) = ((z*z)/(r*r))*(1+(B(i,4)/(B(i,3)*B(i,3))));
    if(B(i,3) == 0)
```

```
        B(i,6) = 0;
    else
        if(B(i,6)>B(i,5))
            B(i,11) = sqrt(B(i,5)/B(i,6));
        else
            B(i,11) = 1;
        end;
    end;
end;
```

Literaturverzeichnis

- [1] Mack, T.: Schadensversicherungsmathematik, VVW Karlsruhe 2001
- [2] Herzog, T.: Introduction to Credibility Theory, ACTEX Publications Inc. 1999
- [3] Klugman, S.: Loss Models - From Data to Decision, John Wiley & Sons, Inc. 1998
- [4] Klugman, S.: Credibility Theory Valuation Actuary Symposium TS28, Drake University 2007
www.soa.org/files/pdf/07-Texas-Klugman-28.pdf
Aufgerufen am: 9. März 2010
- [5] Goulet, V.: On Approximations in Limited Fluctuation Credibility Theory, Casualty Actuarial Society 1997
- [6] Rautmann, N.: Risikogerechte Prämienkalkulation im Versicherungsunternehmen am Beispiel der Industriellen Feuerversicherung, VVW Karlsruhe 1998
- [7] Fuchsbrunner, F.: Credibility Pricing in Reinsurance, Universität München 2009
- [8] Mahler, H.; Dean, C. G.: Chapter 8 - Credibility
www.soa.org/files/pdf/C-21-01.pdf
Aufgerufen am: 15. Juni 2010
- [9] Gerber, H.: Lebensversicherungsmathematik, Springer-Verlag, Zürich 1986
- [10] Harth, C.: Schadenreservierung für einen Critical-Illness-Bestand über Chain-Ladder-Verfahren, Praktikumsbericht, Munichre 2010
- [11] Thiel, B.: Kalkulation der BUZ auf der Grundlage der Theorie der Markov-Ketten, IFA-Ulm 2000
- [12] Bertram, J.: Angewandte Risikotheorie - Berechnung von Gesamtschadenverteilung, TU Carolo-Wilhelmina 1983
- [13] Holler, M.; Illing, G.: Einführung in die Spieltheorie, Springer-Verlag, Berlin 2008

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden.

München, 21. Juli 2010

Unterschrift